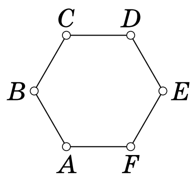
LXXIV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

13 марта 2011 года

8 класс



Задача 1. В вершинах шестиугольника $ABCDEF$ лежали 6 одинаковых на вид шариков: в A — массой 1 г, в B — 2 г, …, в E — 6 г. Шутник поменял местами два шарика в противоположных вершинах. Имеются двухчашечные весы, позволяющие узнать, в какой из чаш масса шариков больше. Как за одно взвешивание определить, какие именно шарики переставлены?

Задача 2. Пётр родился в XIX веке, а его брат Павел — в XX веке. Однажды братья встретились на праздновании своего общего дня рождения. Пётр сказал: «Мой возраст равен сумме цифр года моего рождения». «Мой тоже», — ответил Павел. На сколько лет Павел младше Петра?

Задача 3. Существует ли шестиугольник, который можно разбить одной прямой на четыре равных треугольника?

Задача 4. Каждое звено несамопересекающейся ломаной состоит из нечётного числа сторон клеток квадрата 100×100, соседние звенья перпендикулярны. Может ли ломаная пройти через все вершины клеток?

Задача 5. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC, и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD, пересекаются в точке P. Докажите, что $PA = PD$.

Задача 6. В каждой клетке квадратной таблицы написано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a = b$.

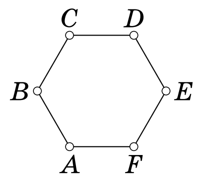
Девятая устная городская олимпиада по геометрии для 8—11 классов
состоится 10 апреля 2011 года.
Подробная информация на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXIV Московской математической олимпиады
пройдёт в воскресенье 3 апреля 2011 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/

LXXIV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

13 марта 2011 года

8 класс



Задача 1. В вершинах шестиугольника $ABCDEF$ лежали 6 одинаковых на вид шариков: в A — массой 1 г, в B — 2 г, …, в E — 6 г. Шутник поменял местами два шарика в противоположных вершинах. Имеются двухчашечные весы, позволяющие узнать, в какой из чаш масса шариков больше. Как за одно взвешивание определить, какие именно шарики переставлены?

Задача 2. Пётр родился в XIX веке, а его брат Павел — в XX веке. Однажды братья встретились на праздновании своего общего дня рождения. Пётр сказал: «Мой возраст равен сумме цифр года моего рождения». «Мой тоже», — ответил Павел. На сколько лет Павел младше Петра?

Задача 3. Существует ли шестиугольник, который можно разбить одной прямой на четыре равных треугольника?

Задача 4. Каждое звено несамопересекающейся ломаной состоит из нечётного числа сторон клеток квадрата 100×100, соседние звенья перпендикулярны. Может ли ломаная пройти через все вершины клеток?

Задача 5. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC, и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD, пересекаются в точке P. Докажите, что $PA = PD$.

Задача 6. В каждой клетке квадратной таблицы написано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a = b$.

Девятая устная городская олимпиада по геометрии для 8—11 классов
состоится 10 апреля 2011 года.
Подробная информация на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXIV Московской математической олимпиады
пройдёт в воскресенье 3 апреля 2011 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/

LXXIV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

13 марта 2011 года

9 класс

Задача 1. Что больше: $2011^{2011}+2009^{2009}$ или $2011^{2009}+2009^{2011}$?

Задача 2. В турнире каждый участник встретился с каждым один раз. Каждую встречу судил один арбитр, и все арбитры судили разное количество встреч. Игрок Иванов утверждает, что все его встречи судили разные арбитры. То же самое утверждают о себе игроки Петров и Сидоров. Может ли быть, что никто из них не ошибается?

Задача 3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C угол A равен 30°. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, D — точка пересечения отрезка BI с этой окружностью. Докажите, что отрезки AI и CD перпендикулярны.

Задача 4. На доске написаны три натуральных числа, не превосходящих 40. За один ход можно увеличить любое из написанных чисел на число процентов, равное одному из двух оставшихся чисел, если в результате получится целое число. Существуют ли такие исходные числа, что за несколько ходов одно из чисел на доске можно сделать больше 2011?

Задача 5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC лучи AB и DC пересекаются в точке K. Точки P и Q — центры описанных окружностей треугольников ABD и BCD. Докажите, что $\angle PKA = \angle QKD$.

Задача 6. На доске выписано $(n-1)n$ выражений: x_1-x_2, x_1-x_3, …, x_1-x_n, x_2-x_1, x_2-x_3, …, x_2-x_n, …, x_n-x_{n-1}, где $n \geqslant 3$. Лёша записал в тетрадь все эти выражения, их суммы по два различных, по три различных и т. д. вплоть до суммы всех выражений. При этом Лёша во всех выписываемых суммах приводил подобные слагаемые (например, вместо $(x_1-x_2)+(x_2-x_3)$ Лёша запишет x_1-x_3, а вместо $(x_1-x_2)+(x_2-x_1)$ он запишет 0). Сколько выражений Лёша записал в тетрадь ровно по одному разу?

Девятая устная городская олимпиада по геометрии для 8—11 классов
состоится 10 апреля 2011 года.
Подробная информация на сайте `http://olympiads.mccme.ru/ustn/`

Закрытие LXXIV Московской математической олимпиады
пройдёт в воскресенье 3 апреля 2011 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте `http://www.mccme.ru/mmo/`

LXXIV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

13 марта 2011 года

9 класс

Задача 1. Что больше: $2011^{2011}+2009^{2009}$ или $2011^{2009}+2009^{2011}$?

Задача 2. В турнире каждый участник встретился с каждым один раз. Каждую встречу судил один арбитр, и все арбитры судили разное количество встреч. Игрок Иванов утверждает, что все его встречи судили разные арбитры. То же самое утверждают о себе игроки Петров и Сидоров. Может ли быть, что никто из них не ошибается?

Задача 3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C угол A равен 30°. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, D — точка пересечения отрезка BI с этой окружностью. Докажите, что отрезки AI и CD перпендикулярны.

Задача 4. На доске написаны три натуральных числа, не превосходящих 40. За один ход можно увеличить любое из написанных чисел на число процентов, равное одному из двух оставшихся чисел, если в результате получится целое число. Существуют ли такие исходные числа, что за несколько ходов одно из чисел на доске можно сделать больше 2011?

Задача 5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC лучи AB и DC пересекаются в точке K. Точки P и Q — центры описанных окружностей треугольников ABD и BCD. Докажите, что $\angle PKA = \angle QKD$.

Задача 6. На доске выписано $(n-1)n$ выражений: x_1-x_2, x_1-x_3, …, x_1-x_n, x_2-x_1, x_2-x_3, …, x_2-x_n, …, x_n-x_{n-1}, где $n \geqslant 3$. Лёша записал в тетрадь все эти выражения, их суммы по два различных, по три различных и т. д. вплоть до суммы всех выражений. При этом Лёша во всех выписываемых суммах приводил подобные слагаемые (например, вместо $(x_1-x_2)+(x_2-x_3)$ Лёша запишет x_1-x_3, а вместо $(x_1-x_2)+(x_2-x_1)$ он запишет 0). Сколько выражений Лёша записал в тетрадь ровно по одному разу?

Девятая устная городская олимпиада по геометрии для 8—11 классов
состоится 10 апреля 2011 года.
Подробная информация на сайте `http://olympiads.mccme.ru/ustn/`

Закрытие LXXIV Московской математической олимпиады
пройдёт в воскресенье 3 апреля 2011 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте `http://www.mccme.ru/mmo/`

LXXIV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

13 марта 2011 года

10 класс

Задача 1. Существует ли арифметическая прогрессия из 2011 натуральных чисел, в которой количество чисел, делящихся на 8, меньше, чем количество чисел, делящихся на 9, а последнее в свою очередь меньше, чем количество чисел, делящихся на 10?

Задача 2. Доска 2010×2011 покрыта доминошками 2×1; некоторые из них лежат горизонтально, некоторые — вертикально. Докажите, что граница горизонтальных доминошек с вертикальными имеет чётную длину.

Задача 3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Известно, что центр описанной окружности треугольника BB_1C_1 лежит на прямой AC. Найдите угол C треугольника.

Задача 4. У Винтика и у Шпунтика есть по три палочки суммарной длины 1 метр у каждого. И Винтик, и Шпунтик могут сложить из трёх своих палочек треугольник. Ночью в их дом прокрался Незнайка, взял по одной палочке у Винтика и у Шпунтика и поменял их местами. Наутро оказалось, что Винтик не может сложить из своих палочек треугольник. Можно ли гарантировать, что Шпунтик из своих — сможет?

Задача 5. Куб разбит на прямоугольные параллелепипеды так, что для любых двух параллелепипедов их проекции на некоторую грань куба перекрываются (то есть пересекаются по фигуре ненулевой площади). Докажите, что для любых трёх параллелепипедов найдётся такая грань куба, что проекции каждых двух из них на эту грань не перекрываются.

Задача 6. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 4 гения. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает приём, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять по крайней мере 3 гениев, как бы ни действовала первая фирма?

Девятая устная городская олимпиада по геометрии для 8—11 классов
состоится 10 апреля 2011 года.
Подробная информация на сайте `http://olympiads.mccme.ru/ustn/`

Закрытие LXXIV Московской математической олимпиады
пройдёт в воскресенье 3 апреля 2011 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте `http://www.mccme.ru/mmo/`

LXXIV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

13 марта 2011 года

10 класс

Задача 1. Существует ли арифметическая прогрессия из 2011 натуральных чисел, в которой количество чисел, делящихся на 8, меньше, чем количество чисел, делящихся на 9, а последнее в свою очередь меньше, чем количество чисел, делящихся на 10?

Задача 2. Доска 2010×2011 покрыта доминошками 2×1; некоторые из них лежат горизонтально, некоторые — вертикально. Докажите, что граница горизонтальных доминошек с вертикальными имеет чётную длину.

Задача 3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Известно, что центр описанной окружности треугольника BB_1C_1 лежит на прямой AC. Найдите угол C треугольника.

Задача 4. У Винтика и у Шпунтика есть по три палочки суммарной длины 1 метр у каждого. И Винтик, и Шпунтик могут сложить из трёх своих палочек треугольник. Ночью в их дом прокрался Незнайка, взял по одной палочке у Винтика и у Шпунтика и поменял их местами. Наутро оказалось, что Винтик не может сложить из своих палочек треугольник. Можно ли гарантировать, что Шпунтик из своих — сможет?

Задача 5. Куб разбит на прямоугольные параллелепипеды так, что для любых двух параллелепипедов их проекции на некоторую грань куба перекрываются (то есть пересекаются по фигуре ненулевой площади). Докажите, что для любых трёх параллелепипедов найдётся такая грань куба, что проекции каждых двух из них на эту грань не перекрываются.

Задача 6. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 4 гения. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает приём, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять по крайней мере 3 гениев, как бы ни действовала первая фирма?

Девятая устная городская олимпиада по геометрии для 8—11 классов
состоится 10 апреля 2011 года.
Подробная информация на сайте `http://olympiads.mccme.ru/ustn/`

Закрытие LXXIV Московской математической олимпиады
пройдёт в воскресенье 3 апреля 2011 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте `http://www.mccme.ru/mmo/`

LXXIV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

13 марта 2011 года

11 класс, первый день

Задача 1. Последовательность из двух различных чисел продолжили двумя способами: так, чтобы получилась геометрическая прогрессия, и так, чтобы получилась арифметическая прогрессия. При этом третий член геометрической прогрессии совпал с десятым членом арифметической прогрессии. А с каким членом арифметической прогрессии совпал четвёртый член геометрической прогрессии?

Задача 2. Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов $x^{2011} + 2011x - 1$ и $x^{2011} - 2011x + 1$.

Задача 3. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D, а на боковой стороне AB — точки E и M так, что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен стороне AC. Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.

Задача 4. В каждой клетке квадратной таблицы написано по действительному числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма k наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма k наибольших чисел равна b.

1) Докажите, что если $k = 2$, то $a = b$.

2) В случае $k = 3$ приведите пример такой таблицы, для которой $a \neq b$.

Задача 5. Рассматриваются ортогональные проекции данного правильного тетраэдра с единичным ребром на всевозможные плоскости. Какое наибольшее значение может принимать радиус круга, содержащегося в такой проекции?

Задача 6. Продавец хочет разрезать кусок сыра на части, которые можно будет разложить на две кучки равного веса. Он умеет разрезать любой кусок сыра в одном и том же отношении $a : (1 - a)$ по весу, где $0 < a < 1$. Верно ли, что на любом промежутке длины 0,001 из интервала $(0; 1)$ найдется значение a, при котором он сможет добиться желаемого результата с помощью конечного числа разрезов?

Девятая устная городская олимпиада по геометрии для 8—11 классов
состоится 10 апреля 2011 года.
Подробная информация на сайте `http://olympiads.mccme.ru/ustn/`

При выходе из аудитории не забудьте получить пропуск на показ работ.

Подробную информацию о **втором дне** смотрите на сайте
`http://www.mccme.ru/mmo/`
Закрытие LXXIV Московской математической олимпиады
пройдёт в воскресенье 3 апреля 2011 года в Главном здании МГУ.

LXXIV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

13 марта 2011 года

11 класс, первый день

Задача 1. Последовательность из двух различных чисел продолжили двумя способами: так, чтобы получилась геометрическая прогрессия, и так, чтобы получилась арифметическая прогрессия. При этом третий член геометрической прогрессии совпал с десятым членом арифметической прогрессии. А с каким членом арифметической прогрессии совпал четвёртый член геометрической прогрессии?

Задача 2. Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов $x^{2011} + 2011x - 1$ и $x^{2011} - 2011x + 1$.

Задача 3. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D, а на боковой стороне AB — точки E и M так, что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен стороне AC. Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.

Задача 4. В каждой клетке квадратной таблицы написано по действительному числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма k наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма k наибольших чисел равна b.

1) Докажите, что если $k = 2$, то $a = b$.

2) В случае $k = 3$ приведите пример такой таблицы, для которой $a \neq b$.

Задача 5. Рассматриваются ортогональные проекции данного правильного тетраэдра с единичным ребром на всевозможные плоскости. Какое наибольшее значение может принимать радиус круга, содержащегося в такой проекции?

Задача 6. Продавец хочет разрезать кусок сыра на части, которые можно будет разложить на две кучки равного веса. Он умеет разрезать любой кусок сыра в одном и том же отношении $a : (1 - a)$ по весу, где $0 < a < 1$. Верно ли, что на любом промежутке длины 0,001 из интервала $(0; 1)$ найдется значение a, при котором он сможет добиться желаемого результата с помощью конечного числа разрезов?

Девятая устная городская олимпиада по геометрии для 8—11 классов
состоится 10 апреля 2011 года.
Подробная информация на сайте `http://olympiads.mccme.ru/ustn/`

При выходе из аудитории не забудьте получить пропуск на показ работ.

Подробную информацию о **втором дне** смотрите на сайте
`http://www.mccme.ru/mmo/`
Закрытие LXXIV Московской математической олимпиады
пройдёт в воскресенье 3 апреля 2011 года в Главном здании МГУ.

LXXIV Московская математическая олимпиада, 2-ой день, 11 класс

1. Кривая на плоскости в некоторой системе координат (декартовой) служит графиком функции $y = \sin x$. Может ли та же кривая являться графиком функции $y = \sin^2 x$ в другой системе координат: если да, то каковы ее начало координат и единицы длины на осях (относительно исходных координат и единиц длины)?

2. Верно ли, что любые 100 карточек, на которых написано по одной цифре 1, 2 или 3, встречающейся не более чем по 50 раз каждая, можно разложить в один ряд так, чтобы в нем не было фрагментов 11, 22, 33, 123 и 321?

3. Внутри треугольника ABC взята такая точка O, что

$$\angle ABO = \angle CAO, \quad \angle BAO = \angle BCO, \quad \angle BOC = 90^\circ.$$

Найдите отношение $AC : OC$.

4. При какой перестановке a_1, a_2, $\ldots a_{2011}$ чисел 1, 2, $\ldots$ 2011 значение выражения

$$a_1^{a_2^{a_3^{\cdots a_{2010}^{a_{2011}}}}}$$

будет наибольшим?

5. По рёбрам треугольной пирамиды ползают четыре жука, при этом каждый жук всё время остается только в одной грани (в каждой грани — свой жук). Каждый жук обходит границу своей грани в определенном направлении, причем так, что любые два жука по общему для них ребру ползут в противоположных направлениях. Докажите, что если скорости (возможно, непостоянные) каждого из жуков всегда больше 1 см/с, то когда-нибудь какие-то два жука обязательно встретятся независимо от пирамиды, начального положения и скорости жуков.

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 03.04.2011.
Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ см. на сайте http://olympiads.mccme.ru/mmo.

Москва, 19 марта 2011 года

LXXIV Московская математическая олимпиада, 2-ой день, 11 класс

1. Кривая на плоскости в некоторой системе координат (декартовой) служит графиком функции $y = \sin x$. Может ли та же кривая являться графиком функции $y = \sin^2 x$ в другой системе координат: если да, то каковы ее начало координат и единицы длины на осях (относительно исходных координат и единиц длины)?

2. Верно ли, что любые 100 карточек, на которых написано по одной цифре 1, 2 или 3, встречающейся не более чем по 50 раз каждая, можно разложить в один ряд так, чтобы в нем не было фрагментов 11, 22, 33, 123 и 321?

3. Внутри треугольника ABC взята такая точка O, что

$$\angle ABO = \angle CAO, \quad \angle BAO = \angle BCO, \quad \angle BOC = 90^\circ.$$

Найдите отношение $AC : OC$.

4. При какой перестановке a_1, a_2, $\ldots a_{2011}$ чисел 1, 2, $\ldots$ 2011 значение выражения

$$a_1^{a_2^{a_3^{\cdots a_{2010}^{a_{2011}}}}}$$

будет наибольшим?

5. По рёбрам треугольной пирамиды ползают четыре жука, при этом каждый жук всё время остается только в одной грани (в каждой грани — свой жук). Каждый жук обходит границу своей грани в определенном направлении, причем так, что любые два жука по общему для них ребру ползут в противоположных направлениях. Докажите, что если скорости (возможно, непостоянные) каждого из жуков всегда больше 1 см/с, то когда-нибудь какие-то два жука обязательно встретятся независимо от пирамиды, начального положения и скорости жуков.

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 03.04.2011.
Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ см. на сайте http://olympiads.mccme.ru/mmo.

Москва, 19 марта 2011 года