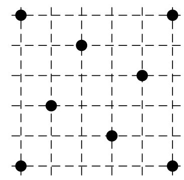
## LXXV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

18 марта 2012 года • 8 класс

**Задача 1.** На доске написаны четыре трёхзначных числа, в сумме дающие 2012. Для записи их всех были использованы только две различные цифры. Приведите пример таких чисел.

**Задача 2.** Кузнечик умеет прыгать только ровно на 50 сантиметров. Он хочет обойти 8 точек, отмеченных на рисунке (сторона клетки равна 10 сантиметрам). Какое наименьшее количество прыжков ему придётся сделать? (Разрешается посещать и другие точки плоскости, в том числе не узлы сетки. Начинать и заканчивать можно в любых точках.)



**Задача 3.** На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Саша разбивает точки на пары, после чего соединяет точки в каждой из пар отрезком. Всегда ли он может это сделать так, чтобы каждые два отрезка пересекались?

**Задача 4.** В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр $BH$ на сторону $AD$. На отрезке $BH$ отметили точку $M$, равноудалённую от точек $C$ и $D$. Пусть точка $K$ — середина стороны $AB$. Докажите, что угол $MKD$ прямой.

**Задача 5.** Рациональные числа $x$, $y$ и $z$ таковы, что все числа $x+y^2+z^2$, $x^2+y+z^2$ и $x^2+y^2+z$ целые. Докажите, что число $2x$ целое.

**Задача 6.** В клетках таблицы $m \times n$ расставлены числа. Оказалось, что в каждой клетке записано количество соседних с ней по стороне клеток, в которых стоит единица. При этом не все числа — нули. При каких числах $m$ и $n$, больших 100, такое возможно?

---

**Десятая устная городская олимпиада по геометрии для 8—11 классов**
состоится 8 апреля 2012 года.
Подробная информация на сайте `http://olympiads.mccme.ru/ustn/`

---

**Закрытие LXXV Московской математической олимпиады**
пройдёт в воскресенье 1 апреля 2012 года в Главном здании МГУ.
Подробная информация на сайте `http://www.mccme.ru/mmo/`

## LXXV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

18 марта 2012 года • 9 класс

**Задача 1.** В стране Далёкой провинция называется *крупной*, если в ней живёт более 7 % жителей этой страны. Известно, что для каждой крупной провинции найдутся две провинции с меньшим населением такие, что их суммарное население больше, чем у этой крупной провинции. Какое наименьшее число провинций может быть в стране Далёкой?

**Задача 2.** В ряд лежит $2n$ груш. Массы любых двух соседних груш отличаются не более, чем на 1 г. Докажите, что можно разложить все груши по $n$ пакетам по две груши в каждый и выложить эти пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов также отличались не более, чем на 1 г.

**Задача 3.** В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр $BH$ на сторону $AD$. На отрезке $BH$ отметили точку $M$, равноудалённую от точек $C$ и $D$. Пусть точка $K$ — середина стороны $AB$. Докажите, что угол $MKD$ прямой.

**Задача 4.** Рациональные числа $x$, $y$ и $z$ таковы, что все числа $x+y^2+z^2$, $x^2+y+z^2$ и $x^2+y^2+z$ целые. Верно ли, что число $2x$ целое?

**Задача 5.** Дан треугольник $ABC$. Прямая $l$ касается вписанной в него окружности. Обозначим через $l_a$, $l_b$, $l_c$ прямые, симметричные $l$ относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику $ABC$.

**Задача 6.** а) В футбольном турнире участвовало 75 команд. Каждая команда играла с каждой один раз, за победу в матче команда получала 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. Известно, что любые две команды набрали различное количество очков. Найдите наименьшую возможную разность очков у команд, занявших первое и последнее места.

б) Тот же вопрос для $n$ команд.

---

**Десятая устная городская олимпиада по геометрии для 8—11 классов**
состоится 8 апреля 2012 года.
Подробная информация на сайте `http://olympiads.mccme.ru/ustn/`

---

**Закрытие LXXV Московской математической олимпиады**
пройдёт в воскресенье 1 апреля 2012 года в Главном здании МГУ.
Подробная информация на сайте `http://www.mccme.ru/mmo/`

# LXXV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

18 марта 2012 года • 10 класс

**Задача 1.** Алёша написал на доске 5 целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, $-5$ в каком-то порядке. Восстановите стёртое число и докажите, что было написано именно оно.

**Задача 2.** В клетках таблицы $n \times n$ стоят плюсы и минусы. За один ход разрешается в произвольной строке или в произвольном столбце поменять все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно получить такую, при которой во всех ячейках стоят плюсы. Докажите, что этого можно добиться не более чем за $n$ ходов.

**Задача 3.** Из плоскости вырезали равносторонний треугольник. Можно ли оставшуюся часть плоскости замостить треугольниками, любые два из которых подобны, но не гомотетичны?

**Задача 4.** По кругу разложено чётное количество груш. Массы любых двух соседних отличаются не более, чем на 1 г. Докажите, что можно все груши объединить в пары и разложить по кругу таким образом, чтобы массы любых двух соседних пар тоже отличались не более, чем на 1 г.

**Задача 5.** Дан остроугольный треугольник $ABC$. Для произвольной прямой $l$ обозначим через $l_a$, $l_b$, $l_c$ прямые, симметричные $l$ относительно сторон треугольника, а через $I_l$ — центр вписанной окружности треугольника, образованного этими прямыми. Найдите геометрическое место точек $I_l$.

**Задача 6.** Рассмотрим граф, у которого вершины соответствуют всевозможным трёхэлементным подмножествам множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$, а ребра проводятся между вершинами, которые соответствуют подмножествам, пересекающимся по ровно одному элементу. Найдите минимальное количество цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы любые две вершины, соединённые ребром, были разного цвета.

---

**Десятая устная городская олимпиада по геометрии для 8—11 классов**
состоится 8 апреля 2012 года.
Подробная информация на сайте `http://olympiads.mccme.ru/ustn/`

---

**Закрытие LXXV Московской математической олимпиады**
пройдёт в воскресенье 1 апреля 2012 года в Главном здании МГУ.
Подробная информация на сайте `http://www.mccme.ru/mmo/`

# LXXV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

18 марта 2012 года • 11 класс, первый день

**Задача 1.** Алёша написал на доске 5 целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, $-5$ в каком-то порядке. Восстановите стёртое число и докажите, что было написано именно оно.

**Задача 2.** Для заданных значений $a$, $b$, $c$ и $d$ оказалось, что графики функций $y = 2a + \frac{1}{x-b}$ и $y = 2c + \frac{1}{x-d}$ имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций $y = 2b + \frac{1}{x-a}$ и $y = 2d + \frac{1}{x-c}$ также имеют ровно одну общую точку.

**Задача 3.** В треугольнике $ABC$ высоты или их продолжения пересекаются в точке $H$, а $R$ — радиус описанной около него окружности. Докажите, что если $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$, то $AH + BH \geqslant 2R$.

**Задача 4.** На собрание пришло $n$ человек ($n > 1$). Оказалось, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых.

а) Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании.

б) Покажите, что $n$ может быть больше 4.

**Задача 5.** Для $n = 1, 2, 3$ будем называть числом $n$-го типа любое число, которое либо равно 0, либо входит в бесконечную геометрическую прогрессию 1, $(n+2)$, $(n+2)^2$, ..., либо является суммой нескольких различных её членов. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа.

**Задача 6.** Про бесконечный набор прямоугольников известно, что в нём для любого числа $S$ найдутся прямоугольники суммарной площади больше $S$.

а) Обязательно ли этим набором можно покрыть всю плоскость, если при этом допускаются наложения?

б) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что все прямоугольники в наборе являются квадратами.

---

**Десятая устная городская олимпиада по геометрии для 8—11 классов**
состоится 8 апреля 2012 года.
Подробная информация на сайте `http://olympiads.mccme.ru/ustn/`

---

**Закрытие LXXV Московской математической олимпиады**
пройдёт в воскресенье 1 апреля 2012 года в Главном здании МГУ.
Подробная информация на сайте `http://www.mccme.ru/mmo/`

## LXXV Московская математическая олимпиада
## 11 класс, второй день

**1.** К каждому члену некоторой конечной последовательности подряд идущих натуральных чисел приписали справа по две цифры и получили последовательность квадратов подряд идущих натуральных чисел. Какое наибольшее число членов могла иметь эта последовательность?

**2.** На плоской горизонтальной площадке стоят 5 прожекторов, каждый из которых испускает лазерный луч под одним из двух острых углов $\alpha$ или $\beta$ к площадке и может вращаться лишь вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину луча. Известно, что любые 4 из этих прожекторов можно повернуть так, что все 4 испускаемых ими луча пересекутся в одной точке. Обязательно ли можно так повернуть все 5 прожекторов, чтобы все 5 лучей пересеклись в одной точке?

**3.** Учитель написал на доске в алфавитном порядке все возможные $2^n$ слов, состоящих из $n$ букв А или Б. Затем он заменил каждое слово на произведение $n$ множителей, исправив каждую букву А на $x$, а каждую букву Б — на $(1-x)$, и сложил между собой несколько первых из этих многочленов от $x$. Докажите, что полученный многочлен представляет собой либо постоянную, либо возрастающую на отрезке $[0;1]$ функцию от $x$.

**4.** После обеда на *прозрачной* квадратной скатерти остались тёмные пятна общей площади $S$. Оказалось, что если сложить скатерть пополам вдоль любой из двух линий, соединяющих середины противоположных её сторон, или же вдоль одной из двух её диагоналей, то общая видимая площадь пятен будет равна $S_1$. Если же сложить скатерть пополам вдоль другой её диагонали, то общая видимая площадь пятен останется равна $S$. Какое наименьшее значение может принимать величина $S_1 : S$?

**5.** Обозначим через $S(n,k)$ количество не делящихся на $k$ коэффициентов разложения многочлена $(x+1)^n$ по степеням $x$.

а) Найдите $S(2012,3)$.

б) Докажите, что $S(2012^{2011},2011)$ делится на 2012.

*Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 01.04.2012.*
*Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ*
*см. на сайте* http://www.mccme.ru/mmo.

Москва, 24 марта 2012 года


## LXXV Московская математическая олимпиада
## 11 класс, второй день

**1.** К каждому члену некоторой конечной последовательности подряд идущих натуральных чисел приписали справа по две цифры и получили последовательность квадратов подряд идущих натуральных чисел. Какое наибольшее число членов могла иметь эта последовательность?

**2.** На плоской горизонтальной площадке стоят 5 прожекторов, каждый из которых испускает лазерный луч под одним из двух острых углов $\alpha$ или $\beta$ к площадке и может вращаться лишь вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину луча. Известно, что любые 4 из этих прожекторов можно повернуть так, что все 4 испускаемых ими луча пересекутся в одной точке. Обязательно ли можно так повернуть все 5 прожекторов, чтобы все 5 лучей пересеклись в одной точке?

**3.** Учитель написал на доске в алфавитном порядке все возможные $2^n$ слов, состоящих из $n$ букв А или Б. Затем он заменил каждое слово на произведение $n$ множителей, исправив каждую букву А на $x$, а каждую букву Б — на $(1-x)$, и сложил между собой несколько первых из этих многочленов от $x$. Докажите, что полученный многочлен представляет собой либо постоянную, либо возрастающую на отрезке $[0;1]$ функцию от $x$.

**4.** После обеда на *прозрачной* квадратной скатерти остались тёмные пятна общей площади $S$. Оказалось, что если сложить скатерть пополам вдоль любой из двух линий, соединяющих середины противоположных её сторон, или же вдоль одной из двух её диагоналей, то общая видимая площадь пятен будет равна $S_1$. Если же сложить скатерть пополам вдоль другой её диагонали, то общая видимая площадь пятен останется равна $S$. Какое наименьшее значение может принимать величина $S_1 : S$?

**5.** Обозначим через $S(n,k)$ количество не делящихся на $k$ коэффициентов разложения многочлена $(x+1)^n$ по степеням $x$.

а) Найдите $S(2012,3)$.

б) Докажите, что $S(2012^{2011},2011)$ делится на 2012.

*Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 01.04.2012.*
*Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ*
*см. на сайте* http://www.mccme.ru/mmo.

Москва, 24 марта 2012 года