LXXVI Московская математическая олимпиада

8 класс 10.03.2013

Задача № 1. Ваня записал несколько простых чисел, использовав ровно по одному разу все цифры от $\mathbf{1}$ до $\mathbf{9}$. Сумма этих простых чисел оказалась равной $\mathbf{225}$. Можно ли, использовав ровно по одному разу те же цифры, записать несколько простых чисел так, чтобы их сумма оказалась меньше?

Задача № 2. Треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). Точка M — середина стороны AB, точка P — середина отрезка CM, точка N делит сторону BC в отношении $\mathbf{3:1}$ (считая от вершины B). Докажите, что $AP = MN$.

Задача № 3. На занятии кружка $\mathbf{10}$ школьников решали $\mathbf{10}$ задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

Задача № 4. По кругу расставили $\mathbf{1000}$ чисел, среди которых нет нулей, и раскрасили их поочерёдно в белый и чёрный цвета. Оказалось, что каждое чёрное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним чёрных чисел.

Чему может быть равна сумма всех расставленных чисел?

Задача № 5. Будем называть точку плоскости *узлом*, если обе её координаты — целые числа. Внутри некоторого треугольника с вершинами в узлах лежит ровно два узла (возможно, какие-то ещё узлы лежат на его сторонах). Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.

Задача № 6. На доске записано целое положительное число N. Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается либо заменить число на доске на один из его делителей (отличных от единицы и самого числа), либо уменьшить число на единицу (если при этом число остаётся положительным). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. При каких N первый игрок может выиграть, как бы ни играл соперник?

XI устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 14 апреля 2013 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXVI Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 31 марта 2013 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/

LXXVI Московская математическая олимпиада

8 класс 10.03.2013

Задача № 1. Ваня записал несколько простых чисел, использовав ровно по одному разу все цифры от $\mathbf{1}$ до $\mathbf{9}$. Сумма этих простых чисел оказалась равной $\mathbf{225}$. Можно ли, использовав ровно по одному разу те же цифры, записать несколько простых чисел так, чтобы их сумма оказалась меньше?

Задача № 2. Треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). Точка M — середина стороны AB, точка P — середина отрезка CM, точка N делит сторону BC в отношении $\mathbf{3:1}$ (считая от вершины B). Докажите, что $AP = MN$.

Задача № 3. На занятии кружка $\mathbf{10}$ школьников решали $\mathbf{10}$ задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

Задача № 4. По кругу расставили $\mathbf{1000}$ чисел, среди которых нет нулей, и раскрасили их поочерёдно в белый и чёрный цвета. Оказалось, что каждое чёрное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним чёрных чисел.

Чему может быть равна сумма всех расставленных чисел?

Задача № 5. Будем называть точку плоскости *узлом*, если обе её координаты — целые числа. Внутри некоторого треугольника с вершинами в узлах лежит ровно два узла (возможно, какие-то ещё узлы лежат на его сторонах). Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.

Задача № 6. На доске записано целое положительное число N. Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается либо заменить число на доске на один из его делителей (отличных от единицы и самого числа), либо уменьшить число на единицу (если при этом число остаётся положительным). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. При каких N первый игрок может выиграть, как бы ни играл соперник?

XI устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 14 апреля 2013 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXVI Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 31 марта 2013 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/

LXXVI Московская математическая олимпиада

9 класс 10.03.2013

Задача № 1. На круглом столе через равные промежутки лежат пирожные. Игорь ходит вокруг стола и съедает каждое третье встреченное пирожное (каждое пирожное может быть встречено несколько раз). Когда на столе не осталось пирожных, он заметил, что последним взял пирожное, которое встретил первым, и прошёл ровно $\mathbf{7}$ кругов вокруг стола. Сколько было пирожных?

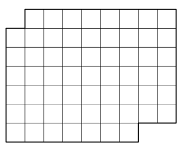
Задача № 2. В треугольнике ABC, где угол B прямой, а угол A меньше угла C, проведена медиана BM. На стороне AC взята точка L так, что $\angle ABM = \angle MBL$. Описанная окружность треугольника BML пересекает сторону AB в точке N. Докажите, что $AN = BL$.

Задача № 3. Про положительные числа a, b, c, d, e известно, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de.$$

Докажите, что среди этих чисел найдутся такие три, что не существует треугольника с такими длинами сторон.

Задача № 4. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две равные части.



Задача № 5. Назовём точку на плоскости узлом, если обе её координаты — целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что среди узлов внутри треугольника можно выбрать такие два узла, что проходящая через них прямая содержит одну из вершин треугольника или параллельна одной из сторон треугольника.

Задача № 6. Сто мудрецов хотят проехать на электричке из 12 вагонов от первой до 76-й станции. Они знают, что на первой станции в два вагона электрички сядут два контролёра. После четвёртой станции на каждом перегоне один из контролёров будет переходить в соседний вагон, причём они ходят по очереди. Мудрец видит контролёра, только если он в соседнем вагоне или через вагон. На каждой станции каждый мудрец может перебежать по платформе не далее, чем на три вагона (например, из 7-го вагона мудрец может добежать до любого вагона с номером от 4 до 10 и сесть в него). Какое максимальное число мудрецов сможет ни разу не оказаться в одном вагоне с контролёром, как бы контролёры ни перемещались? (Никакой информации о контролёрах, кроме указанной в задаче, мудрец не получает. Мудрецы договариваются о стратегии заранее.)

XI устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 14 апреля 2013 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXVI Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 31 марта 2013 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/

LXXVI Московская математическая олимпиада

9 класс 10.03.2013

Задача № 1. На круглом столе через равные промежутки лежат пирожные. Игорь ходит вокруг стола и съедает каждое третье встреченное пирожное (каждое пирожное может быть встречено несколько раз). Когда на столе не осталось пирожных, он заметил, что последним взял пирожное, которое встретил первым, и прошёл ровно $\mathbf{7}$ кругов вокруг стола. Сколько было пирожных?

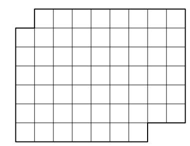
Задача № 2. В треугольнике ABC, где угол B прямой, а угол A меньше угла C, проведена медиана BM. На стороне AC взята точка L так, что $\angle ABM = \angle MBL$. Описанная окружность треугольника BML пересекает сторону AB в точке N. Докажите, что $AN = BL$.

Задача № 3. Про положительные числа a, b, c, d, e известно, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de.$$

Докажите, что среди этих чисел найдутся такие три, что не существует треугольника с такими длинами сторон.

Задача № 4. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две равные части.



Задача № 5. Назовём точку на плоскости узлом, если обе её координаты — целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что среди узлов внутри треугольника можно выбрать такие два узла, что проходящая через них прямая содержит одну из вершин треугольника или параллельна одной из сторон треугольника.

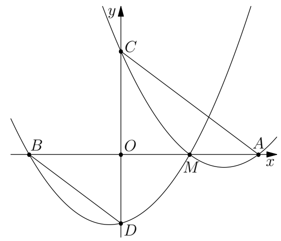
Задача № 6. Сто мудрецов хотят проехать на электричке из 12 вагонов от первой до 76-й станции. Они знают, что на первой станции в два вагона электрички сядут два контролёра. После четвёртой станции на каждом перегоне один из контролёров будет переходить в соседний вагон, причём они ходят по очереди. Мудрец видит контролёра, только если он в соседнем вагоне или через вагон. На каждой станции каждый мудрец может перебежать по платформе не далее, чем на три вагона (например, из 7-го вагона мудрец может добежать до любого вагона с номером от 4 до 10 и сесть в него). Какое максимальное число мудрецов сможет ни разу не оказаться в одном вагоне с контролёром, как бы контролёры ни перемещались? (Никакой информации о контролёрах, кроме указанной в задаче, мудрец не получает. Мудрецы договариваются о стратегии заранее.)

XI устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 14 апреля 2013 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXVI Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 31 марта 2013 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/

LXXVI Московская математическая олимпиада

10 класс 10.03.2013



Задача № 1. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом 1. График одного из них пересекает ось Ox в точках A и M, а ось Oy — в точке C. График другого пересекает ось Ox в точках B и M, а ось Oy — в точке D. (Здесь O — начало координат; точки расположены как на рисунке). Докажите, что треугольники AOC и BOD подобны.

Задача № 2. На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли ещё 20 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку *отважной*, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика — *отважным*, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке, чередуясь.

Сколько из них были отважными?

Задача № 3. Дан правильный $4n$-угольник $A_1A_2\ldots A_{4n}$ площади S, причём $n > 1$. Найдите площадь четырехугольника $A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}$.

Задача № 4. В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитарных классов состоит из n человек, команда математических — из m, причём $n \neq m$. Так как стол для игры всего один, было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд начинают играть между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры человек, стоящий в очереди первым, заменяет за столом члена своей команды, который становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

Задача № 5. Дана функция $f(x)$, значение которой при любом целом x целое. Известно, что для любого простого числа p существует такой многочлен $Q_p(x)$ степени, не превышающей 2013, с целыми коэффициентами, что $f(n) - Q_p(n)$ делится на p при любом целом n.

Верно ли, что существует многочлен $g(x)$ с вещественными коэффициентами такой, что $g(n) = f(n)$ для любого целого n?

Задача № 6. Пусть I — центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника ABC. Через A_1 обозначим середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки A, а через A_2 — середину дуги BAC. Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую A_2I, пересекает прямую BC в точке A'. Аналогично определяются точки B' и C'.

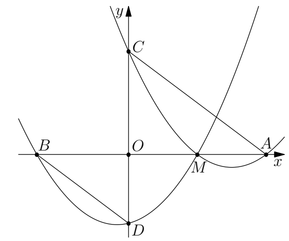
а) Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

б) Докажите, что эта прямая перпендикулярна прямой OI, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

XI устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 14 апреля 2013 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXVI Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 31 марта 2013 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/

LXXVI Московская математическая олимпиада
10 класс 10.03.2013



Задача № 1. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом 1. График одного из них пересекает ось Ox в точках A и M, а ось Oy — в точке C. График другого пересекает ось Ox в точках B и M, а ось Oy — в точке D. (Здесь O — начало координат; точки расположены как на рисунке). Докажите, что треугольники AOC и BOD подобны.

Задача № 2. На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли ещё 20 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку *отважной*, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика — *отважным*, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке, чередуясь.
Сколько из них были отважными?

Задача № 3. Дан правильный $4n$-угольник $A_1A_2\ldots A_{4n}$ площади S, причём $n > 1$. Найдите площадь четырехугольника $A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}$.

Задача № 4. В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитарных классов состоит из n человек, команда математических — из m, причём $n \neq m$. Так как стол для игры всего один, было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд начинают играть между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры человек, стоящий в очереди первым, заменяет за столом члена своей команды, который становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

Задача № 5. Дана функция $f(x)$, значение которой при любом целом x целое. Известно, что для любого простого числа p существует такой многочлен $Q_p(x)$ степени, не превышающей 2013, с целыми коэффициентами, что $f(n) - Q_p(n)$ делится на p при любом целом n.
Верно ли, что существует многочлен $g(x)$ с вещественными коэффициентами такой, что $g(n) = f(n)$ для любого целого n?

Задача № 6. Пусть I — центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника ABC. Через A_1 обозначим середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки A, а через A_2 — середину дуги BAC. Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую A_2I, пересекает прямую BC в точке A'. Аналогично определяются точки B' и C'.
а) Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой.
б) Докажите, что эта прямая перпендикулярна прямой OI, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

XI устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 14 апреля 2013 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXVI Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 31 марта 2013 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/

LXXVI Московская математическая олимпиада

Первый день 11 класс 10.03.2013

Задача № 1. Два приведённых квадратных трёхчлена имеют общий корень, а дискриминант их суммы равен сумме их дискриминантов.

Докажите, что тогда дискриминант хотя бы одного из этих двух трёхчленов равен нулю.

Задача № 2. Найдите все пары простых чисел p и q, обладающие следующим свойством: $7p + 1$ делится на q, а $7q + 1$ делится на p.

Задача № 3. Дан такой выпуклый четырёхугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M — середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки C к прямой AD, в точке H. Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.

Задача № 4. Можно ли так раскрасить все клетки бесконечной клетчатой плоскости в белый и чёрный цвета, чтобы каждая вертикальная прямая и каждая горизонтальная прямая пересекали конечное число белых клеток, а каждая наклонная прямая — конечное число чёрных?

Задача № 5. 'Три спортсмена стартовали одновременно из точки A и бежали по прямой в точку B каждый со своей постоянной скоростью. Добежав до точки B, каждый из них мгновенно повернул обратно и бежал с другой постоянной скоростью к финишу в точке A. Их тренер бежал рядом и всё время находился в точке, сумма расстояний от которой до участников забега была наименьшей. Известно, что расстояние от A до B равно 60 м и все спортсмены финишировали одновременно. Мог ли тренер пробежать меньше 100 м?

Задача № 6. Две команды шахматистов одинаковой численности сыграли матч: каждый сыграл по одному разу с каждым из другой команды. В каждой партии давали 1 очко за победу, $\frac{1}{2}$ — за ничью и 0 — за поражение. В итоге команды набрали поровну очков. Докажите, что какие-то два участника матча тоже набрали поровну очков, если в обеих командах было: а) по 5 шахматистов; б) произвольное равное число шахматистов.

XI устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 14 апреля 2013 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXVI Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 31 марта 2013 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/

LXXVI Московская математическая олимпиада

Первый день 11 класс 10.03.2013

Задача № 1. Два приведённых квадратных трёхчлена имеют общий корень, а дискриминант их суммы равен сумме их дискриминантов.

Докажите, что тогда дискриминант хотя бы одного из этих двух трёхчленов равен нулю.

Задача № 2. Найдите все пары простых чисел p и q, обладающие следующим свойством: $7p + 1$ делится на q, а $7q + 1$ делится на p.

Задача № 3. Дан такой выпуклый четырёхугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M — середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки C к прямой AD, в точке H. Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.

Задача № 4. Можно ли так раскрасить все клетки бесконечной клетчатой плоскости в белый и чёрный цвета, чтобы каждая вертикальная прямая и каждая горизонтальная прямая пересекали конечное число белых клеток, а каждая наклонная прямая — конечное число чёрных?

Задача № 5. 'Три спортсмена стартовали одновременно из точки A и бежали по прямой в точку B каждый со своей постоянной скоростью. Добежав до точки B, каждый из них мгновенно повернул обратно и бежал с другой постоянной скоростью к финишу в точке A. Их тренер бежал рядом и всё время находился в точке, сумма расстояний от которой до участников забега была наименьшей. Известно, что расстояние от A до B равно 60 м и все спортсмены финишировали одновременно. Мог ли тренер пробежать меньше 100 м?

Задача № 6. Две команды шахматистов одинаковой численности сыграли матч: каждый сыграл по одному разу с каждым из другой команды. В каждой партии давали 1 очко за победу, $\frac{1}{2}$ — за ничью и 0 — за поражение. В итоге команды набрали поровну очков. Докажите, что какие-то два участника матча тоже набрали поровну очков, если в обеих командах было: а) по 5 шахматистов; б) произвольное равное число шахматистов.

XI устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 14 апреля 2013 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXVI Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 31 марта 2013 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/

LXXVI Московская математическая олимпиада
11 класс, второй день

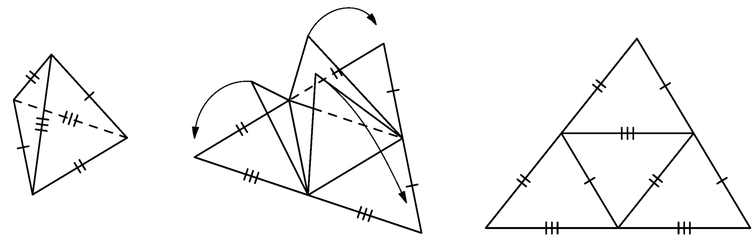
1. Два пирата делили добычу, состоящую из пяти золотых слитков, масса одного из которых 1 кг, а другого — 2 кг. Какую массу могли иметь три других слитка, если известно, что какие бы два слитка ни выбрал себе первый пират, второй пират сможет так разделить оставшиеся слитки, чтобы каждому из них досталось золота поровну?

2. Найдите такое значение $a > 1$, при котором уравнение $a^x = \log_a x$ имеет единственное решение.

3. Сравните числа

$$\left(1+\frac{2}{3^3}\right)\left(1+\frac{2}{5^3}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{2013^3}\right) \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

4. Известно, что всякую треугольную пирамиду, противоположные рёбра которой попарно равны, можно так разрезать вдоль трёх её рёбер и развернуть, чтобы её развёрткой стал треугольник без внутренних разрезов (см. рисунок). Найдётся ли ещё какой-нибудь выпуклый многогранник, который можно так разрезать вдоль нескольких его рёбер и развернуть, чтобы его развёрткой стал треугольник без внутренних разрезов?



5. Саша написал по кругу в произвольном порядке не более ста различных натуральных чисел, а Дима пытается угадать их количество. Для этого Дима сообщает Саше в некотором порядке несколько номеров, а затем Саша сообщает Диме в том же порядке какие числа стоят под указанными Димой номерами, если считать числа по часовой стрелке, начиная с одного и того же числа. Сможет ли Дима заведомо угадать количество написанных Сашей чисел, сообщив

а) 17 номеров;

б) менее 16 номеров?

Москва, 16 марта 2013 г.

Все результаты и актуальная информация — см. сайт http://www.mccme.ru.

LXXVI Московская математическая олимпиада
11 класс, второй день

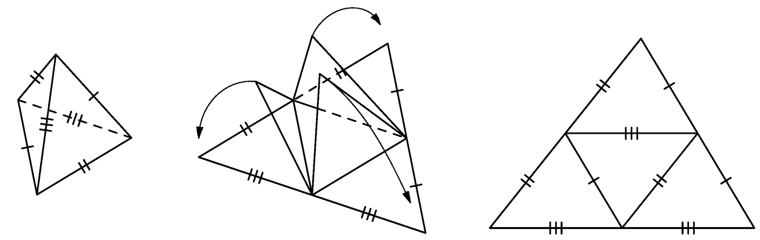
1. Два пирата делили добычу, состоящую из пяти золотых слитков, масса одного из которых 1 кг, а другого — 2 кг. Какую массу могли иметь три других слитка, если известно, что какие бы два слитка ни выбрал себе первый пират, второй пират сможет так разделить оставшиеся слитки, чтобы каждому из них досталось золота поровну?

2. Найдите такое значение $a > 1$, при котором уравнение $a^x = \log_a x$ имеет единственное решение.

3. Сравните числа

$$\left(1+\frac{2}{3^3}\right)\left(1+\frac{2}{5^3}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{2013^3}\right) \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

4. Известно, что всякую треугольную пирамиду, противоположные рёбра которой попарно равны, можно так разрезать вдоль трёх её рёбер и развернуть, чтобы её развёрткой стал треугольник без внутренних разрезов (см. рисунок). Найдётся ли ещё какой-нибудь выпуклый многогранник, который можно так разрезать вдоль нескольких его рёбер и развернуть, чтобы его развёрткой стал треугольник без внутренних разрезов?



5. Саша написал по кругу в произвольном порядке не более ста различных натуральных чисел, а Дима пытается угадать их количество. Для этого Дима сообщает Саше в некотором порядке несколько номеров, а затем Саша сообщает Диме в том же порядке какие числа стоят под указанными Димой номерами, если считать числа по часовой стрелке, начиная с одного и того же числа. Сможет ли Дима заведомо угадать количество написанных Сашей чисел, сообщив

а) 17 номеров;

б) менее 16 номеров?

Москва, 16 марта 2013 г.

Все результаты и актуальная информация — см. сайт http://www.mccme.ru.