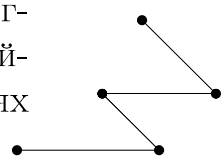
LXXVII Московская математическая олимпиада

2 марта 2014 года • 8 класс

Задача 1. Витя хочет найти выражение, состоящее из единиц, скобок, знаков «+» и «×», такое что
— его значение равно 10;
— если в этом выражении заменить все знаки «+» на знаки «×», а знаки «×» на знаки «+», всё равно получится 10.
Приведите пример такого выражения.

Задача 2. Будем называть *змейкой* ломаную, у которой все углы между соседними звеньями равны, причём для любого некрайнего звена соседние с ним звенья лежат в разных полуплоскостях от этого звена (пример змейки — на рис. справа).



Барон Мюнхгаузен заявил, что отметил на плоскости 6 точек и нашёл 6 разных способов соединить их (пятизвенной) змейкой (вершины каждой из змеек — отмеченные точки). Могут ли его слова быть правдой?

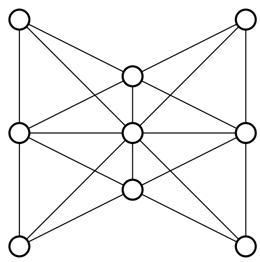
Задача 3. Натуральные числа от 1 до 2014 как-то разбили на пары, числа в каждой из пар сложили, а полученные 1007 сумм перемножили. Мог ли результат оказаться квадратом натурального числа?

Задача 4. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD. Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM, а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD. Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

Задача 5. В городе Плоском нет ни одной башни. Для развития туризма жители города собираются построить несколько башен, общей высотой в 30 этажей.

Инспектор Высотников, поднимаясь на каждую башню, считает число более низких башен, а потом складывает получившиеся величины. После чего инспектор рекомендует город тем сильнее, чем получившаяся величина больше. Сколько и какой высоты башен надо построить жителям, чтобы получить наилучшую возможную рекомендацию?

Задача 6. На столе лежат 9 яблок, образуя 10 рядов по 3 яблока в каждом (см. рис.). Известно, что у девяти рядов веса одинаковы, а вес десятого ряда отличается.



Есть электронные весы, на которых за рубль можно узнать вес любой группы яблок. Какое наименьшее число рублей надо заплатить, чтобы узнать, вес какого именно ряда отличается?

LXXVII Московская математическая олимпиада

2 марта 2014 года • 9 класс

Задача 1. Все коэффициенты квадратного трёхчлена — нечётные целые числа. Докажите, что у него нет корней вида $1/n$, где n — натуральное число.

Задача 2. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

Задача 3. Дано n палочек. Из любых трёх можно сложить тупоугольный треугольник. Каково наибольшее возможное значение n?

Задача 4. На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска тоже равны. (Скатерть нигде не накладывается сама на себя, её размеры могут отличаться от размеров стола.)

Задача 5. *Радикалом* натурального числа N (обозначается $\mathrm{rad}(N)$) называется произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Например, $\mathrm{rad}(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Существует ли тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C таких, что $A + B = C$ и $C > 1000 \cdot \mathrm{rad}(ABC)$?

Задача 6. На окружности отмечены 10 точек, занумерованные по часовой стрелке: A_1, A_2, …, A_{10}, причём известно, что их можно разбить на пары симметричных относительно центра окружности.

Изначально в каждой отмеченной точке сидит по кузнечику. Каждую минуту один из кузнечиков прыгает *вдоль окружности* через своего соседа так, чтобы расстояние между ними не изменилось. При этом нельзя пролетать над другими кузнечиками и попадать в точку, где уже сидит кузнечик.

Через некоторое время оказалось, что какие-то 9 кузнечиков сидят в точках A_1, A_2, …, A_9, а десятый кузнечик сидит на дуге $A_9A_{10}A_1$. Можно ли утверждать, что он сидит именно в точке A_{10}?

LXXVII Московская математическая олимпиада

2 марта 2014 года • 10 класс

Задача 1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $\dfrac{1}{a}$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

Задача 2. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

Задача 3. Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P — середину отрезка CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает отрезок BC во внутренней точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

Задача 4. Дано несколько белых и несколько чёрных точек. Из каждой белой точки идёт стрелка в каждую чёрную, на каждой стрелке написано натуральное число.

Известно, что если пройти по любому замкнутому маршруту, то произведение чисел на стрелках, идущих по направлению движения, равно произведению чисел на стрелках, идущих против направления движения.

Обязательно ли тогда можно поставить в каждой точке натуральное число так, чтобы число на каждой стрелке равнялось произведению чисел на её концах?

Задача 5. Дан треугольник, у которого нет равных углов. Петя и Вася играют в такую игру: за один ход Петя отмечает точку на плоскости, а Вася красит её по своему выбору в красный или синий цвет. Петя выиграет, если какие-то три из отмеченных им и покрашенных Васей точек образуют одноцветный треугольник, подобный исходному.

За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть (каков бы ни был исходный треугольник)?

Задача 6. Многочлен $P(x)$ обладает следующими свойствами: $P(0) = 1$, $(P(x))^2 = 1 + x + x^{100} \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — некий многочлен. Докажите, что коэффициент при x^{99} многочлена $(P(x) + 1)^{100}$ равен нулю.

LXXVII Московская математическая олимпиада

2 марта 2014 года • 11 класс, первый день

Задача 1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках c и $\frac{1}{a}$ значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

Задача 2. Найдите все значения a, для которых найдутся такие x, y и z, что числа $\cos x$, $\cos y$ и $\cos z$ попарно различны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию, при этом числа $\cos(x + a)$, $\cos(y + a)$ и $\cos(z+a)$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию.

Задача 3. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ с центром O отмечены такие точки P и Q соответственно, что $\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$.

а) Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

б) Докажите, что прямые AQ и CP пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

Задача 4. Саша обнаружил, что на калькуляторе осталось ровно n рабочих кнопок с цифрами. Оказалось, что любое натуральное число от 1 до 99 999 999 можно либо набрать, используя лишь рабочие цифры, либо получить как сумму двух натуральных чисел, каждое из которых можно набрать, используя лишь рабочие цифры. Каково наименьшее n, при котором это возможно?

Задача 5. Многочлен $P(x)$ обладает следующими свойствами: $P(0) = 1$, $(P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x)$ при всех действительных x, где $Q(x)$ — некоторый многочлен. Докажите, что коэффициент при x^{99} многочлена $(P(x) + 1)^{100}$ равен нулю.

Задача 6. В королевстве некоторые пары городов соединены железной дорогой. У короля есть полный список, в котором поимённо перечислены все такие пары (каждый город имеет своё собственное имя). Оказалось, что для любой упорядоченной пары городов принц может переименовать все города так, чтобы первый город оказался названным именем второго города, а король не заметил бы изменений. Верно ли, что для любой пары городов принц может переименовать все города так, чтобы первый город оказался названным именем второго города, второй город оказался названным именем первого города, а король не заметил бы изменений?

Решение каждого пункта задачи 3 оценивается как решение отдельной задачи.

Закрытие LXXVII Московской математической олимпиады
пройдёт в воскресенье 23 марта в Главном здании МГУ.
Подробная информация на сайте www.mccme.ru/mmo/

LXXVII Московская математическая олимпиада
11 класс, второй день

1. Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами и a не кратным 2014, что все числа $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(2014)$ имеют различные остатки при делении на 2014? Ответ обоснуйте.

2. Найдите все такие a и b, что $|a| + |b| \geqslant 2/\sqrt{3}$ и при всех x выполнено неравенство $|a\sin x + b\sin(2x)| \leqslant 1$.

3. Докажите, что для любого натурального n найдётся натуральное число, десятичная запись квадрата которого начинается n единицами, а заканчивается какой-то комбинацией из n единиц и двоек.

4. У повара в подчинении десять поварят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного или нескольких поварят на дежурство, а каждый из дежурных поварят уносит с работы по одному пирожному каждому своему недежурящему другу. В конце дня повар узнаёт количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней понять, кто из поварят дружит между собой, а кто нет?

5. Поверхность выпуклого многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ состоит из восьми треугольных граней $A_iB_jC_k$, где i, j, k меняются от 1 до 2. Сфера с центром в точке O касается всех этих граней. Докажите, что точка O и середины трёх отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат в одной плоскости.

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 23.03.2014.
Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ см. на сайте http://www.mccme.ru/mmo.

Москва, 15 марта 2014 года

LXXVII Московская математическая олимпиада
11 класс, второй день

1. Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами и a не кратным 2014, что все числа $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(2014)$ имеют различные остатки при делении на 2014? Ответ обоснуйте.

2. Найдите все такие a и b, что $|a| + |b| \geqslant 2/\sqrt{3}$ и при всех x выполнено неравенство $|a\sin x + b\sin(2x)| \leqslant 1$.

3. Докажите, что для любого натурального n найдётся натуральное число, десятичная запись квадрата которого начинается n единицами, а заканчивается какой-то комбинацией из n единиц и двоек.

4. У повара в подчинении десять поварят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного или нескольких поварят на дежурство, а каждый из дежурных поварят уносит с работы по одному пирожному каждому своему недежурящему другу. В конце дня повар узнаёт количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней понять, кто из поварят дружит между собой, а кто нет?

5. Поверхность выпуклого многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ состоит из восьми треугольных граней $A_iB_jC_k$, где i, j, k меняются от 1 до 2. Сфера с центром в точке O касается всех этих граней. Докажите, что точка O и середины трёх отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат в одной плоскости.

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 23.03.2014.
Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ см. на сайте http://www.mccme.ru/mmo.

Москва, 15 марта 2014 года