LXXVIII Московская математическая олимпиада

15 марта 2015 года • 8 класс

Задача 1. Володя бежит по круговой дистанции с постоянной скоростью. В двух точках дистанции стоит по фотографу. После старта Володя 2 минуты был ближе к первому фотографу, затем 3 минуты — ближе ко второму фотографу, а потом снова ближе к первому. За какое время Володя пробежал весь круг?

Задача 2. Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что прямая DE перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков AE и BC.

Задача 3. Миша заметил, что на электронном табло, показывающем курс доллара к рублю (4 цифры, разделенные десятичной запятой), горят те же самые четыре *различные* цифры, что и месяц назад, но в другом порядке. При этом курс вырос ровно на 20%. Приведите пример того, как такое могло произойти.

Задача 4. Будем называть натуральное число *почти квадратом*, если это либо точный квадрат (т. е. квадрат целого числа), либо точный квадрат, умноженный на простое число. Могут ли 8 почти квадратов идти подряд?

Задача 5. В остроугольном треугольнике ABC, в котором $\angle A = 45^\circ$, проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Биссектриса угла BAA_1 пересекает прямую B_1A_1 в точке D, а биссектриса угла CAA_1 пересекает прямую C_1A_1 в точке E. Найдите угол между прямыми BD и CE.

Задача 6. Император пригласил на праздник 2015 волшебников, некоторые из которых добрые, а остальные злые. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой может говорить что угодно. При этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет.

На празднике император задает каждому волшебнику (в каком хочет порядке) по вопросу, на которые можно ответить «да» или «нет». Опросив всех волшебников, император изгоняет одного. Изгнанный волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. Затем император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (он может это сделать после любого вопроса).

Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

XIII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 12 апреля.
Подробная информация на сайте `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXVIII Московской математической олимпиады
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`

LXXVIII Московская математическая олимпиада

15 марта 2015 года • 9 класс

Задача 1. Существует ли такое натуральное число n, что числа n, n^2, n^3 начинаются на одну и ту же цифру, отличную от единицы?

Задача 2. По кругу в некотором порядке расставлены все натуральные числа от 1 до 1000 таким образом, что любое из чисел является делителем суммы двух своих соседей. Известно, что рядом с числом k стоят два нечетных числа. Какой четности может быть число k?

Задача 3. Каждый день Фрекен Бок испекает квадратный торт размером 3×3. Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных куска размером 1×1 со сторонами, параллельными сторонам торта (не обязательно по линиям сетки 3×3). После этого Малыш вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?

Задача 4. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC. Две равные окружности касаются сторон AB, BC и AC, BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K. Оказалось, что K лежит на прямой OI. Найдите $\angle BAC$.

Задача 5. Император пригласил на праздник 2015 волшебников, некоторые из которых добрые, а остальные злые. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой может говорить что угодно. При этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет.

На празднике император задает каждому волшебнику (в каком хочет порядке) по вопросу, на которые можно ответить «да» или «нет». Опросив всех волшебников, император изгоняет одного. Изгнанный волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. Затем император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (он может это сделать после любого вопроса).

Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

Задача 6. Существуют ли два многочлена с целыми коэффициентами такие, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2015, но у произведения этих двух многочленов модули всех коэффициентов не превосходят 1?

Задача 1. По целому числу a построим последовательность

$$a_1 = a,\ a_2 = 1 + a_1,\ a_3 = 1 + a_1a_2,\ a_4 = 1 + a_1a_2a_3,\ \ldots$$

(каждое следующее число на 1 превосходит произведение всех предыдущих). Докажите, что разности ее соседнних членов $(a_{n+1} - a_n)$ — квадраты целых чисел.

Задача 2. В турнире по футболу участвует $2n$ команд ($n > 1$). В каждом туре команды разбиваются на n пар, и команды в каждой паре играют между собой. Так провели $2n - 1$ тур, по окончании которых каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. За победу давалось 3 очка, за ничью 1, за поражение 0 очков. Оказалось, что для каждой команды отношение набранных ей очков к количеству сыгранных ей игр после последнего тура не изменилось. Докажите, что все команды сыграли вничью все партии.

Задача 3. Клетки бесконечного клетчатого листа бумаги раскрасили в черный и белый цвета в шахматном порядке. Пусть X — треугольник площади S с вершинами в узлах сетки. Покажите, что есть такой подобный X треугольник с вершинами в узлах сетки, что площадь его белой части равна площади черной части и равна S.

Задача 4. Император пригласил на праздник 2015 волшебников, некоторые из которых добрые, а остальные злые. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой может говорить что угодно. При этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет.

На празднике император задает каждому волшебнику (в каком хочет порядке) по вопросу, на которые можно ответить «да» или «нет». Опросив всех волшебников, император изгоняет одного. Изгнанный волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. Затем император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (он может это сделать после любого вопроса).

Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

Задача 5. Дан треугольник ABC. Проведены высота AH и медиана CM. Обозначим их точку пересечения через P. Высота, проведенная из вершины B треугольника, пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки H на прямую CM, в точке Q. Докажите, что прямые CQ и BP перпендикулярны.

Задача 6. Существуют ли два многочлена с целыми коэффициентами такие, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2015, но у произведения этих двух многочленов модули всех коэффициентов не превосходят 1?

LXXVIII Московская математическая олимпиада

15 марта 2015 года • 11 класс, первый день

Задача 1. Последовательность (a_n) такова, что $a_n = n^2$ при $1 \leqslant n \leqslant 5$ и при всех натуральных n выполнено равенство $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Найдите a_{2015}.

Задача 2. В прошлом году Миша купил смартфон, который стоил целое четырёхзначное число рублей. Зайдя в магазин в этом году, он заметил, что цена смартфона выросла на 20 % и при этом состоит из тех же цифр, но в обратном порядке. Какую сумму Миша потратил на смартфон?

Задача 3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X, а на боковых сторонах — точки P и Q так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Задача 4. Единичный квадрат разрезан на n треугольников. Докажите, что одним из треугольников можно накрыть квадрат со стороной $1/n$.

Задача 5. Докажите, что в таблице 8×8 нельзя расставить натуральные числа от 1 до 64 (каждое по одному разу) так, чтобы в ней для любого квадрата 2×2 вида $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$ было выполнено равенство $|ad - bc| = 1$.

Задача 6. Все грани шестигранника — четырёхугольники, а в каждой его вершине сходятся по три ребра. Верно ли, что если для него существуют вписанная и описанная сферы, центры которых совпадают, то этот шестигранник — куб?

LXXVIII Московская математическая олимпиада

21 марта 2015 года ⧫ 11 класс, второй день

Задача 1. Сумма нескольких не обязательно различных положительных чисел не превосходила 100. Каждое из них заменили на новое следующим образом: сначала прологарифмировали по основанию 10, затем округлили стандартным образом до ближайшего целого числа и, наконец, возвели 10 в найденную целую степень. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел превышает 300?

Задача 2. Какое наибольшее количество множителей вида $\sin\frac{n\pi}{x}$ можно вычеркнуть в левой части уравнения

$$\sin\frac{\pi}{x}\sin\frac{2\pi}{x}\sin\frac{3\pi}{x}\ldots\sin\frac{2015\pi}{x}=0$$

так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

Задача 3. У Ивана-царевича есть два сосуда ёмкостью по 1 л, один из которых полностью заполнен обычной водой, а в другом находится a л живой воды, $0 < a < 1$. Он может переливать только из сосуда в сосуд любой объём жидкости до любого уровня без переполнений и хочет за конечное число таких переливаний получить 40-процентный раствор живой воды в одном из сосудов. При каких значениях a Иван-царевич сможет это сделать? Считайте, что уровень жидкости в каждом из сосудов можно точно измерить в любой момент времени.

Задача 4. День в Анчурии может быть либо ясным, когда весь день солнце, либо дождливым, когда весь день льёт дождь. И если сегодня день не такой, как вчера, то анчурийцы говорят, что сегодня погода изменилась. Однажды анчурийские учёные установили, что 1 января день всегда ясный, а каждый следующий день в январе будет ясным, только если ровно год назад в этот день погода изменилась. В 2015 году январь в Анчурии был весьма разнообразным: то солнце, то дожди. В каком году погода в январе впервые будет меняться ровно так же, как в январе 2015 года?

Задача 5. На поверхности сферической планеты расположены четыре материка, отделённые друг от друга океаном. Назовём точку океана *особой*, если для неё найдутся не менее трёх ближайших (находящихся от неё на равных расстояниях) точек суши, причём все на разных материках. Какое наибольшее число особых точек может быть на этой планете?

Закрытие LXXVIII Московской математической олимпиады

пройдёт в воскресенье 29 марта в МГУ имени М. В. Ломоносова.

Подробная информация на сайте `www.mccme.ru/mmo/`

LXXVIII Московская математическая олимпиада

21 марта 2015 года ⧫ 11 класс, второй день

Задача 1. Сумма нескольких не обязательно различных положительных чисел не превосходила 100. Каждое из них заменили на новое следующим образом: сначала прологарифмировали по основанию 10, затем округлили стандартным образом до ближайшего целого числа и, наконец, возвели 10 в найденную целую степень. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел превышает 300?

Задача 2. Какое наибольшее количество множителей вида $\sin\frac{n\pi}{x}$ можно вычеркнуть в левой части уравнения

$$\sin\frac{\pi}{x}\sin\frac{2\pi}{x}\sin\frac{3\pi}{x}\ldots\sin\frac{2015\pi}{x}=0$$

так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

Задача 3. У Ивана-царевича есть два сосуда ёмкостью по 1 л, один из которых полностью заполнен обычной водой, а в другом находится a л живой воды, $0 < a < 1$. Он может переливать только из сосуда в сосуд любой объём жидкости до любого уровня без переполнений и хочет за конечное число таких переливаний получить 40-процентный раствор живой воды в одном из сосудов. При каких значениях a Иван-царевич сможет это сделать? Считайте, что уровень жидкости в каждом из сосудов можно точно измерить в любой момент времени.

Задача 4. День в Анчурии может быть либо ясным, когда весь день солнце, либо дождливым, когда весь день льёт дождь. И если сегодня день не такой, как вчера, то анчурийцы говорят, что сегодня погода изменилась. Однажды анчурийские учёные установили, что 1 января день всегда ясный, а каждый следующий день в январе будет ясным, только если ровно год назад в этот день погода изменилась. В 2015 году январь в Анчурии был весьма разнообразным: то солнце, то дожди. В каком году погода в январе впервые будет меняться ровно так же, как в январе 2015 года?

Задача 5. На поверхности сферической планеты расположены четыре материка, отделённые друг от друга океаном. Назовём точку океана *особой*, если для неё найдутся не менее трёх ближайших (находящихся от неё на равных расстояниях) точек суши, причём все на разных материках. Какое наибольшее число особых точек может быть на этой планете?

Закрытие LXXVIII Московской математической олимпиады

пройдёт в воскресенье 29 марта в МГУ имени М. В. Ломоносова.

Подробная информация на сайте `www.mccme.ru/mmo/`