# LXXIX Московская математическая олимпиада

13 марта 2016 года • 8 класс

**Задача 1**. Можно ли число $\frac{1}{10}$ представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей? (То есть выражений вида $\frac{p}{q}$, где $p$ и $q$ — натуральные числа и $p < q$.)

**Задача 2**. За круглым столом сидят 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Двое из них заявили: «Оба моих соседа — лжецы», а остальные восемь заявили: «Оба моих соседа — рыцари». Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 человек? (Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет.)

**Задача 3**. На медиане $AM$ треугольника $ABC$ нашлась такая точка $K$, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.

**Задача 4**. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 99, в десятичной записи которого участвуют только четные цифры.

**Задача 5**. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, все стороны которого равны между собой. Известно, что угол $A$ равен $120°$, угол $C$ равен $135°$, а угол $D$ равен $n°$. Найдите все возможные целые значения $n$.

**Задача 6**. Четное число орехов разложено на три кучки. За одну операцию можно переложить половину орехов из кучки с четным числом орехов в любую другую кучку. Докажите, что, как бы орехи ни были разложены изначально, такими операциями можно в какой-нибудь кучке собрать ровно половину всех орехов.

**XIV устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов** состоится 17 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/` (после 20 марта)

Задачи, решения, информация о закрытии
**LXXIX Московской математической олимпиады**
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`

# LXXIX Московская математическая олимпиада

13 марта 2016 года • 9 класс

**Задача 1**. Сумма трех положительных чисел равна их произведению. Докажите, что хотя бы два из них больше единицы.

**Задача 2**. В треугольнике $ABC$ на продолжении медианы $CM$ за точку $C$ отметили точку $K$ так, что $AM = CK$. Известно, что угол $BMC$ равен $60°$. Докажите, что $AC = BK$.

**Задача 3**. Васе задали на дом уравнение $x^2+p_1x+q_1 = 0$, где $p_1$ и $q_1$ — целые числа. Он нашел его корни $p_2$ и $q_2$ и написал новое уравнение $x^2 + p_2x + q_2 = 0$. Повторив операцию еще трижды, Вася заметил, что он решал 4 квадратных уравнения, и все они имели целые корни (если из двух возможных уравнений корни имело ровно одно, то Вася всегда выбирал его, а если оба — любое). Однако, как ни старался Вася, у него не получилось составить пятое уравнение так, чтобы оно имело вещественные корни, и Вася сильно расстроился. Какое уравнение Васе задали на дом?

**Задача 4**. Точка $O$ — центр описанной окружности остроугольного треугольника $ABC$. Прямая, перпендикулярная стороне $AC$, пересекает отрезок $BC$ и прямую $AB$ в точках $Q$ и $P$ соответственно. Докажите, что точки $B$, $O$ и середины отрезков $AP$ и $CQ$ лежат на одной окружности.

**Задача 5**. Есть ли 2016-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2016 разных 2016-значных полных квадратов?

**Задача 6**. В стране лингвистов существует $n$ языков. Там живет $m$ людей, каждый из которых знает ровно 3 языка, причем для разных людей эти наборы различны. Известно, что максимальное число людей, любые два из которых могут поговорить без посредников, равно $k$. Оказалось, что $11n \leqslant k \leqslant \frac{m}{2}$. Докажите, что тогда в стране найдутся хотя бы $mn$ пар людей, которые не смогут поговорить без посредников.

**XIV устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов** состоится 17 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/` (после 20 марта)

Задачи, решения, информация о закрытии
**LXXIX Московской математической олимпиады**
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`

LXXIX Московская математическая олимпиада

13 марта 2016 года • 10 класс

**Задача 1**. Можно ли число $\frac{1}{10}$ представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей? (То есть выражений вида $\frac{p}{q}$, где $p$ и $q$ — натуральные числа и $p < q$.)

**Задача 2**. Внутри выпуклого четырехугольника $A_1A_2B_2B_1$ нашлась такая точка $C$, что треугольники $CA_1A_2$ и $CB_1B_2$ правильные. Точки $C_1$ и $C_2$ симметричны точке $C$ относительно прямых $A_2B_2$ и $A_1B_1$ соответственно. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

**Задача 3**. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет 4 положительных корня с учетом кратности (т.е. сумма кратностей всех положительных корней этого уравнения равна 4). Найдите наименьшее возможное значение коэффициента $b$ при этих условиях.

**Задача 4**. Бесконечную клетчатую доску раскрасили шахматным образом, и в каждую белую клетку вписали по отличному от нуля целому числу. После этого для каждой черной клетки посчитали разность: произведение того, что написано в соседних по горизонтали клетках, минус произведение того, что написано в соседних по вертикали. Могут ли все такие разности равняться 1?

**Задача 5**. В куб с ребром 1 поместили 8 непересекающихся шаров (возможно, разного размера). Может ли сумма диаметров этих шаров быть больше 4?

**Задача 6**. В однокруговом хоккейном турнире принимало участие 2016 команд. По регламенту турнира за победу дается 3 очка, за поражение 0 очков, а в случае ничьей играется дополнительное время, победитель которого получает 2 очка, а проигравший — 1 очко. По окончании турнира Остапу Бендеру сообщили количество очков, набранных каждой командой, на основании чего он сделал вывод, что не менее $N$ матчей закончились дополнительным временем. Найдите наибольшее возможное значение $N$.

**XIV устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов**
состоится 17 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/` (после 20 марта)

Задачи, решения, информация о закрытии
**LXXIX Московской математической олимпиады**
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`

LXXIX Московская математическая олимпиада

13 марта 2016 года • 11 класс, первый день

**Задача 1**. На шахматном турнире для 12 участников каждый сыграл ровно по одной партии с каждым из остальных. За выигрыш давали 1 очко, за ничью $\frac{1}{2}$, за проигрыш 0. Вася проиграл только одну партию, но занял последнее место, набрав меньше всех очков. Петя занял первое место, набрав больше всех очков. На сколько очков Вася отстал от Пети?

**Задача 2**. Существует ли такое значение $x$, что выполняется равенство $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = 1$?

**Задача 3**. Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ отмечены точки $M$ и $N$ так, что $AM = CN$ и $BM = DN$, а четырехугольники $AMND$ и $BMNC$ вписанные. Докажите, что прямая $MN$ параллельна основаниям трапеции.

**Задача 4**. В английском клубе вечером собрались $n$ его членов ($n \geqslant 3$). По традициям клуба каждый принес с собой сок того вида, который он предпочитает, в том количестве, которое он планирует выпить в течение вечера. Согласно правилам клуба, в любой момент любые три его члена могут присесть за столик и выпить сока (каждый — своего) в любом количестве, но обязательно все трое поровну. Докажите, что для того, чтобы все члены могли в течение вечера полностью выпить принесенный с собой сок, необходимо и достаточно, чтобы доля сока, принесенного любым членом клуба, не превосходила одной трети от общего количества.

**Задача 5**. Можно ли четырьмя плоскостями разрезать куб с ребром 1 на части так, чтобы для каждой из частей расстояние между любыми двумя ее точками было: а) меньше $4/5$; б) меньше $4/7$? Предполагается, что все плоскости проводятся одновременно, куб и его части не двигаются.

**Задача 6**. С левого берега реки на правый с помощью одной лодки переправились $N$ туземцев, каждый раз плавая направо вдвоем, а обратно — в одиночку. Изначально каждый знал по одному анекдоту, каждый — свой. На берегах они анекдотов не рассказывали, но в лодке каждый рассказывал попутчику все известные ему на данный момент анекдоты. Для каждого натурального k найдите наименьшее возможное значение $N$, при котором могло случиться так, что в конце каждый туземец знал, кроме своего, еще не менее чем $k$ анекдотов.

**XIV устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов**
состоится 17 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/` (после 20 марта)

Задачи, решения, информация о закрытии
**LXXIX Московской математической олимпиады**
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`

LXXIX Московская математическая олимпиада

19 марта 2016 года ⧫ 11 класс, второй день

**Задача 1.** Найдите наименьшее натуральное число, десятичная запись квадрата которого оканчивается на 2016.

**Задача 2.** Имеются чашечные весы, которые находятся в равновесии, если разность масс на их чашах не превосходит 1 г, а также гири массами $\ln 3$, $\ln 4$, …, $\ln 79$ г. Можно ли разложить все эти гири на чаши весов так, чтобы весы находились в равновесии?

**Задача 3.** Можно ли отметить $k$ вершин правильного 14-угольника так, что любой четырёхугольник с вершинами в отмеченных точках, имеющий две параллельные стороны, является прямоугольником, если: а) $k = 6$; б) $k \geqslant 7$?

**Задача 4.** За некоторое время мальчик проехал на велосипеде целое число раз по периметру квадратной школы в одном направлении с постоянной по величине скоростью 10 км/ч. В это же время по периметру школы прогуливался его папа со скоростью 5 км/ч, при этом он мог менять направление движения. Папа видел мальчика в те и только те моменты, когда они находились на одной стороне школы. Мог ли папа видеть мальчика больше половины указанного времени?

**Задача 5.** Про приведённый многочлен

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

с действительными коэффициентами известно, что при некотором натуральном $m \geqslant 2$ многочлен

$$\underbrace{P(P(\ldots P}_{m\text{ раз}}(x)\ldots))$$

имеет действительные корни, причём только положительные. Обязательно ли сам многочлен $P(x)$ имеет действительные корни, причём только положительные?

---

Решение каждого пункта задачи 3 оценивается как решение отдельной задачи.

---

**Закрытие LXXIX Московской математической олимпиады**

пройдёт в воскресенье 3 апреля в МГУ имени М. В. Ломоносова.

Подробная информация на сайте `www.mccme.ru/mmo/`

LXXIX Московская математическая олимпиада

19 марта 2016 года ⧫ 11 класс, второй день

**Задача 1.** Найдите наименьшее натуральное число, десятичная запись квадрата которого оканчивается на 2016.

**Задача 2.** Имеются чашечные весы, которые находятся в равновесии, если разность масс на их чашах не превосходит 1 г, а также гири массами $\ln 3$, $\ln 4$, …, $\ln 79$ г. Можно ли разложить все эти гири на чаши весов так, чтобы весы находились в равновесии?

**Задача 3.** Можно ли отметить $k$ вершин правильного 14-угольника так, что любой четырёхугольник с вершинами в отмеченных точках, имеющий две параллельные стороны, является прямоугольником, если: а) $k = 6$; б) $k \geqslant 7$?

**Задача 4.** За некоторое время мальчик проехал на велосипеде целое число раз по периметру квадратной школы в одном направлении с постоянной по величине скоростью 10 км/ч. В это же время по периметру школы прогуливался его папа со скоростью 5 км/ч, при этом он мог менять направление движения. Папа видел мальчика в те и только те моменты, когда они находились на одной стороне школы. Мог ли папа видеть мальчика больше половины указанного времени?

**Задача 5.** Про приведённый многочлен

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

с действительными коэффициентами известно, что при некотором натуральном $m \geqslant 2$ многочлен

$$\underbrace{P(P(\ldots P}_{m\text{ раз}}(x)\ldots))$$

имеет действительные корни, причём только положительные. Обязательно ли сам многочлен $P(x)$ имеет действительные корни, причём только положительные?

---

Решение каждого пункта задачи 3 оценивается как решение отдельной задачи.

---

**Закрытие LXXIX Московской математической олимпиады**

пройдёт в воскресенье 3 апреля в МГУ имени М. В. Ломоносова.

Подробная информация на сайте `www.mccme.ru/mmo/`