LXXXII Московская математическая олимпиада

17 марта 2019 года • 8 класс

Задача 1. Все таверны в царстве принадлежат трем фирмам. В целях борьбы с монополиями царь Горох издал следующий указ: каждый день, если у некоторой фирмы оказывается более половины всех таверн и число её таверн делится на 5, то у этой фирмы остается только пятая часть её таверн, а остальные закрываются. Могло ли так случиться, что через три дня у всех фирм стало меньше таверн? (Новые таверны в это время открываться не могут.)

Задача 2. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого $n^2 + 20n + 19$ делится на 2019.

Задача 3. Про трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = BD$. Пусть точка M — середина боковой стороны CD, а O — точка пересечения отрезков AC и BM. Докажите, что треугольник BOC — равнобедренный.

Задача 4. На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.

Задача 5. Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $AB = BC = CK$ и $\angle KAC = 30°$. Найдите угол AKB.

Задача 6. В клетках квадратной таблицы $n \times n$, где $n > 1$, требуется расставить различные целые числа от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n, — в разных строках и в разных столбцах. При каких n это возможно?

XVII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 14 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии LXXXII Московской математической олимпиады на сайте `mccme.ru/mmo/`

LXXXII Московская математическая олимпиада

17 марта 2019 года • 9 класс

Задача 1. Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает 7 различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвёртое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли мудрецы гарантированно справиться с заданием?

Задача 2. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого $n^2 + 20n + 19$ делится на 2019.

Задача 3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB'. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что расстояние от точки A' до прямой BO равно расстоянию от точки B' до прямой AO.

Задача 4. Каждый отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили — в красный цвет, если между его концами четное число вершин, и в синий — в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках — произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?

Задача 5. Биссектриса угла ABC пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точках B и L. Точка M — середина отрезка AC. На дуге ABC окружности ω выбрана точка E так, что $EM \parallel BL$. Прямые AB и BC пересекают прямую EL в точках P и Q соответственно. Докажите, что $PE = EQ$.

Задача 6. Есть 100 кучек по 400 камней в каждой. За ход Петя выбирает две кучки, удаляет из них по одному камню и получает за это столько очков, каков теперь модуль разности числа камней в этих двух кучках. Петя должен удалить все камни. Какое наибольшее суммарное количество очков он может при этом получить?

XVII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 14 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXII Московской математической олимпиады
на сайте `mccme.ru/mmo/`

LXXXII Московская математическая олимпиада

17 марта 2019 года • 10 класс

Задача 1. Приведите пример девятизначного натурального числа, которое делится на 2, если зачеркнуть вторую (слева) цифру, на 3 — если зачеркнуть в исходном числе третью цифру, ..., делится на 9, если в исходном числе зачеркнуть девятую цифру.

Задача 2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB'. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что расстояние от точки A' до прямой BO равно расстоянию от точки B' до прямой AO.

Задача 3. На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.

Задача 4. Каждая точка плоскости раскрашена в один из трёх цветов. Обязательно ли найдётся треугольник площади 1, все вершины которого имеют одинаковый цвет?

Задача 5. Петя и Вася играют в игру. Для каждых пяти различных переменных из набора $x_1, \ldots, x_{10}$ имеется единственная карточка, на которой записано их произведение. Петя и Вася по очереди берут по карточке, начинает Петя. Когда все карточки разобраны, Вася присваивает переменным значения как хочет, но так, что $0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{10}$. Может ли Вася гарантированно добиться того, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети?

Задача 6. Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0, 0)$ и вершинами в точках с целыми координатами, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует *червяк* — фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которых можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)

XVII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 14 апреля.
Подробности — на странице olympiads.mccme.ru/ustn/

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXII Московской математической олимпиады
на сайте mccme.ru/mmo/

LXXXII Московская математическая олимпиада

17 марта 2019 года • 11 класс, первый день

Задача 1. Пусть $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Вычислите

$$\left(1 - \frac{2}{f(1)}\right)\left(1 - \frac{2}{f(2)}\right)\left(1 - \frac{2}{f(3)}\right)\ldots\left(1 - \frac{2}{f(2019)}\right).$$

Задача 2. На экране компьютера напечатано натуральное число, делящееся на 7, а курсор находится в промежутке между некоторыми двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что, если её впечатать в этот промежуток любое число раз, то все получившиеся числа также будут делиться на 7.

Задача 3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB'. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что расстояние от точки A' до прямой BO равно расстоянию от точки B' до прямой AO.

Задача 4. Докажите, что для любых различных натуральных чисел m и n справедливо неравенство $|\sqrt[n]{m} - \sqrt[m]{n}| > \frac{1}{mn}$.

Задача 5. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость одной из его граней является трапеция площади 1. Может ли ортогональной проекцией этого тетраэдра на плоскость другой его грани быть квадрат площади 1?

Задача 6. Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0, 0)$ и вершинами в точках с целыми координатами, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует *червяк* — фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которых можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)

XVII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 14 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии LXXXII Московской математической олимпиады на сайте `mccme.ru/mmo/`

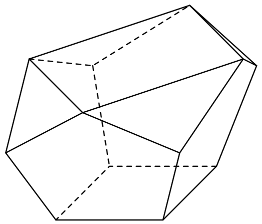
LXXXII Московская математическая олимпиада

23 марта 2019 года ⧫ 11 класс, второй день

Задача 1. Пользуясь равенством $\lg 11 = 1{,}0413\ldots$, найдите наименьшее число $n > 1$, для которого среди n-значных чисел нет ни одного, равного некоторой натуральной степени числа 11.

Задача 2. Существует ли такая гипербола, задаваемая уравнением вида $y = \frac{a}{x}$, что в первой координатной четверти ($x > 0$, $y > 0$) под ней лежат ровно 82 точки с целочисленными координатами?

Задача 3. У многогранника, изображённого на рисунке, грани — четыре правильных пятиугольника, четыре треугольника и два квадрата. Во сколько раз сторона верхнего квадрата больше стороны нижнего?



Задача 4. Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ и для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0$, уравнение

$$a_1(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n) + a_2(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n) + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}) = 0$$

имеет хотя бы один действительный корень.

Задача 5. На доске написано несколько чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b, а затем вместо одного из них написать число $\frac{a+b}{4}$. Какое наименьшее число может остаться на доске после 2018 таких операций, если изначально на ней написано 2019 единиц?

Задачи, решения, информация о закрытии

LXXXII Московской математической олимпиады

на сайте `mccme.ru/mmo/`

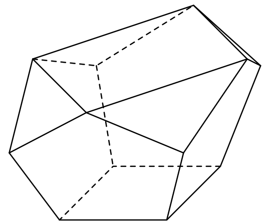
LXXXII Московская математическая олимпиада

23 марта 2019 года ⧫ 11 класс, второй день

Задача 1. Пользуясь равенством $\lg 11 = 1{,}0413\ldots$, найдите наименьшее число $n > 1$, для которого среди n-значных чисел нет ни одного, равного некоторой натуральной степени числа 11.

Задача 2. Существует ли такая гипербола, задаваемая уравнением вида $y = \frac{a}{x}$, что в первой координатной четверти ($x > 0$, $y > 0$) под ней лежат ровно 82 точки с целочисленными координатами?

Задача 3. У многогранника, изображённого на рисунке, грани — четыре правильных пятиугольника, четыре треугольника и два квадрата. Во сколько раз сторона верхнего квадрата больше стороны нижнего?



Задача 4. Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ и для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0$, уравнение

$$a_1(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n) + a_2(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n) + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}) = 0$$

имеет хотя бы один действительный корень.

Задача 5. На доске написано несколько чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b, а затем вместо одного из них написать число $\frac{a+b}{4}$. Какое наименьшее число может остаться на доске после 2018 таких операций, если изначально на ней написано 2019 единиц?

Задачи, решения, информация о закрытии

LXXXII Московской математической олимпиады

на сайте `mccme.ru/mmo/`