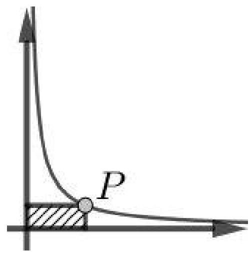
LXXXIII Московская математическая олимпиада

1 марта 2020 года • 8 класс

Задача 1. Том написал на заборе из досок слово ММО, а Гек — число 2020. Ширина каждой буквы и цифры 9 см, а ширина доски забора — 5 см. Мог ли Гек испачкать меньше досок, чем Том? (Доски расположены вертикально, а слова и числа пишутся горизонтально. Цифры и буквы пишутся через равные промежутки.)

Задача 2. На графике функции $y = 1/x$ Миша отмечал подряд все точки с абсциссами $1, 2, 3, \ldots$, пока не устал. Потом пришла Маша и закрасила все прямоугольники, одна из вершин которых — это отмеченная точка, еще одна — начало координат, а еще две лежат на осях (на рисунке показано, какой прямоугольник Маша закрасила бы для отмеченной точки P). Затем учительница попросила ребят посчитать площадь фигуры, состоящей из всех точек, закрашенных ровно один раз. Сколько получилось?



Задача 3. Дано натуральное число N. Вера делает с ним следующие операции: сначала прибавляет 3 до тех пор, пока получившееся число не станет делиться на 5 (если изначально N делится на 5, то ничего прибавлять не надо). Получившееся число Вера делит на 5. Далее делает эти же операции с новым числом, и так далее. Из каких чисел такими операциями нельзя получить 1?

Задача 4. В турнире по гандболу участвуют 20 команд. После того как каждая команда сыграла с каждой по разу, оказалось, что количество очков у всех команд разное. После того как каждая команда сыграла с каждой по второму разу, количество очков у всех команд стало одинаковым. В гандболе за победу команда получает 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение — 0 очков. Верно ли, что найдутся две команды, по разу выигравшие друг у друга?

Задача 5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Перпендикуляр, опущенный из точки A на сторону CD, проходит через середину диагонали BD, а перпендикуляр, опущенный из точки D на сторону AB, проходит через середину диагонали AC. Докажите, что трапеция равнобокая.

Задача 6. У Полины есть колода из 36 карт (4 масти по 9 карт в каждой). Она выбирает из неё половину карт, какие хочет, и отдает Василисе, а вторую половину оставляет себе. Далее каждым ходом игроки по очереди открывают по одной карте по своему выбору (соперник видит масть и достоинство открытой карты), начиная с Полины. Если в ответ на ход Полины Василиса смогла положить карту той же масти или того же достоинства, то Василиса зарабатывает одно очко. Какое наибольшее количество очков Василиса может гарантированно заработать?

XVIII устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 19 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии 22 марта
LXXXIII Московской математической олимпиады —
на сайте `mccme.ru/mmo/`

LXXXIII Московская математическая олимпиада

1 марта 2020 года • 9 класс

Задача 1. Существует ли натуральное число, делящееся на 2020, в котором всех цифр 0, 1, 2, ..., 9 поровну?

Задача 2. Из шести палочек попарно различной длины сложены два треугольника (по три палочки в каждом). Всегда ли можно сложить из них один треугольник, стороны которого состоят из одной, двух и трех палочек соответственно?

Задача 3. Три богатыря сражаются со Змеем Горынычем. Илья Муромец каждым своим ударом отрубает половину всех голов и еще одну, Добрыня Никитич — треть всех голов и еще две, а Алёша Попович — четверть всех голов и еще три. Богатыри бьют по одному, в том порядке, в котором считают нужным. Если ни один богатырь не может ударить из-за того, что число голов получится нецелым, то Змей съедает богатырей. Смогут ли богатыри отрубить все головы 20^{20}-головому Змею?

Задача 4. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) провели высоту BH. Точка P симметрична точке H относительно прямой, соединяющей середины сторон AC и BC. Докажите, что прямая BP содержит центр описанной окружности треугольника ABC.

Задача 5. К Ивану на день рождения пришли $3n$ гостей. У Ивана есть $3n$ цилиндров с написанными сверху буквами А, Б и В, по n штук каждого типа. Иван хочет устроить бал: надеть на гостей цилиндры и выстроить их в хороводы (один или больше) так, чтобы длина каждого хоровода делилась на 3, и при взгляде на любой хоровод сверху читалось бы по часовой стрелке АБВАБВ...АБВ. Докажите, что Иван может устроить бал ровно $(3n)!$ различными способами. (Цилиндры с одинаковыми буквами неразличимы; все гости различны.)

Задача 6. Глеб задумал натуральные числа N и a, $a < N$. Число a он написал на доске. Затем он начал выполнять следующую операцию: делить N с остатком на последнее выписанное на доску число, а полученный остаток от деления также записывать на доску. Когда на доске появилось число 0, он остановился. Мог ли Глеб изначально выбрать такие N и a, чтобы сумма выписанных чисел была больше $100N$?

XVIII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 19 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии 22 марта LXXXIII Московской математической олимпиады — на сайте `mccme.ru/mmo/`

LXXXIII Московская математическая олимпиада

1 марта 2020 года • 10 класс

Задача 1. Приведите пример такого квадратного трехчлена $P(x)$, что при любом x справедливо равенство

$$P(x) + P(x+1) + \cdots + P(x+10) = x^2.$$

Задача 2. Среди зрителей кинофестиваля было поровну мужчин и женщин. Всем зрителям понравилось одинаковое количество фильмов. Каждый фильм понравился восьми зрителям. Докажите, что не менее $3/7$ фильмов обладают следующим свойством: среди зрителей, которым фильм понравился, не менее двух мужчин.

Задача 3. Существует ли вписанный в окружность 19-угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов?

Задача 4. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к BC пересекает AB и AC в точках X и Y. Прямая AO пересекает прямую BC в точке D, M — середина BC. Описанная окружность треугольника ADM пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке E, отличной от A. Докажите, что прямая OE касается описанной окружности треугольника AXY.

Задача 5. На доске написаны 1000 последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на их сумму и разность (не обязательно вычитать из большего меньшее, все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся 1000 последовательных целых чисел.

Задача 6. Для каких k можно закрасить на белой клетчатой плоскости несколько клеток (конечное число, большее нуля) в черный цвет так, чтобы на любой клетчатой вертикали, горизонтали и диагонали либо было ровно k черных клеток, либо вовсе не было черных клеток?

XVIII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 19 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии 22 марта LXXXIII Московской математической олимпиады — на сайте `mccme.ru/mmo/`

LXXXIII Московская математическая олимпиада

1 марта 2020 года • 11 класс, 1 день

Задача 1. Приведите пример числа, делящегося на 2020, в котором каждая из десяти цифр встречается одинаковое количество раз.

Задача 2. Существует ли такая непериодическая функция f, определённая на всей числовой прямой, что при любом x выполнено равенство $f(x+1) = f(x+1)f(x) + 1$?

Задача 3. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) провели высоту BH. Точка P симметрична точке H относительно прямой, соединяющей середины сторон AC и BC. Докажите, что прямая BP содержит центр описанной окружности треугольника ABC.

Задача 4. Из шахматной доски 8×8 вырезали 10 клеток. Известно, что среди вырезанных клеток есть как черные, так и белые. Какое наибольшее количество двухклеточных прямоугольников можно после этого гарантированно вырезать из этой доски?

Задача 5. Существует ли тетраэдр, в сечениях которого двумя разными плоскостями получаются квадраты 1×1 и 100×100?

Задача 6. На доске написаны $2n$ последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на сумму и разность чисел этой пары (не обязательно вычитать из большего числа меньшее, все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся $2n$ последовательных чисел.

XVIII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 19 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения,
информация о втором дне и о закрытии 22 марта
LXXXIII Московской математической олимпиады —
на сайте `mccme.ru/mmo/`

LXXXIII Московская математическая олимпиада

14 марта 2020 года ⧫ 11 класс, второй день

Задача 1. Мальчик едет на самокате от одной автобусной остановки до другой и смотрит в зеркало, не появился ли сзади автобус. Как только мальчик замечает автобус, он может изменить направление движения. При каком наибольшем расстоянии между остановками мальчик гарантированно не упустит автобус, если он знает, что едет со скоростью втрое меньшей скорости автобуса и способен увидеть автобус на расстоянии не более 2 км?

Задача 2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} \pi x = [\lg \pi^x] - [\lg [\pi^x]],$$

где $[a]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее a.

Задача 3. За круглым вращающимся столом, на котором стоят 8 белых и 7 чёрных чашек, сидят 15 гномов. Они надели 8 белых и 7 чёрных колпачков. Каждый гном берёт себе чашку, цвет которой совпадает с цветом его колпачка и ставит напротив себя, после этого стол поворачивается случайным образом. Какое наибольшее число совпадений цвета чашки и колпачка можно гарантировать после поворота стола (гномы сами выбирают, как сесть, но не знают, как повернётся стол)?

Задача 4. На стороне AC треугольника ABC взяли такую точку D, что угол BDC равен углу ABC. Чему равно наименьшее возможное расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, если $BC = 1$?

Задача 5. Кузнечик прыгает по числовой прямой, на которой отмечены точки $-a$ и b. Известно, что a и b — положительные числа, а их отношение иррационально. Если кузнечик находится в точке, которая ближе к $-a$, то он прыгает вправо на расстояние, равное a. Если же он находится в середине отрезка $[-a; b]$ или в точке, которая ближе к b, то он прыгает влево на расстояние, равное b. Докажите, что независимо от своего начального положения кузнечик в некоторый момент окажется от точки 0 на расстоянии, меньшем 10^{-6}.

Задачи, решения, информация о закрытии

LXXXIII Московской математической олимпиады

на сайте `mccme.ru/mmo/`

LXXXIII Московская математическая олимпиада

14 марта 2020 года ⧫ 11 класс, второй день

Задача 1. Мальчик едет на самокате от одной автобусной остановки до другой и смотрит в зеркало, не появился ли сзади автобус. Как только мальчик замечает автобус, он может изменить направление движения. При каком наибольшем расстоянии между остановками мальчик гарантированно не упустит автобус, если он знает, что едет со скоростью втрое меньшей скорости автобуса и способен увидеть автобус на расстоянии не более 2 км?

Задача 2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} \pi x = [\lg \pi^x] - [\lg [\pi^x]],$$

где $[a]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее a.

Задача 3. За круглым вращающимся столом, на котором стоят 8 белых и 7 чёрных чашек, сидят 15 гномов. Они надели 8 белых и 7 чёрных колпачков. Каждый гном берёт себе чашку, цвет которой совпадает с цветом его колпачка и ставит напротив себя, после этого стол поворачивается случайным образом. Какое наибольшее число совпадений цвета чашки и колпачка можно гарантировать после поворота стола (гномы сами выбирают, как сесть, но не знают, как повернётся стол)?

Задача 4. На стороне AC треугольника ABC взяли такую точку D, что угол BDC равен углу ABC. Чему равно наименьшее возможное расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, если $BC = 1$?

Задача 5. Кузнечик прыгает по числовой прямой, на которой отмечены точки $-a$ и b. Известно, что a и b — положительные числа, а их отношение иррационально. Если кузнечик находится в точке, которая ближе к $-a$, то он прыгает вправо на расстояние, равное a. Если же он находится в середине отрезка $[-a; b]$ или в точке, которая ближе к b, то он прыгает влево на расстояние, равное b. Докажите, что независимо от своего начального положения кузнечик в некоторый момент окажется от точки 0 на расстоянии, меньшем 10^{-6}.

Задачи, решения, информация о закрытии

LXXXIII Московской математической олимпиады

на сайте `mccme.ru/mmo/`