LXXXIV Московская математическая олимпиада

28 марта 2021 года • 8 класс

Задача 1. Барон Мюнхгаузен утверждает, что к любому двузначному числу можно справа приписать ещё две цифры так, чтобы получился полный квадрат (к примеру, если задано число 10, то дописываем 24 и получаем $1024 = 32^2$). Прав ли барон?

Задача 2. Митя купил на день рождения круглый торт диаметром 36 сантиметров и 13 тоненьких свечек. Мите не нравится, когда свечки стоят слишком близко, поэтому он хочет поставить их на расстоянии не меньше 10 сантиметров друг от друга. Поместятся ли все свечки на торте?

Задача 3. В комнате находится несколько детей и куча из 2021 конфеты. Каждый из них по очереди подходит к куче, делит количество конфет в ней на количество детей в комнате (включая себя), округляет (если получилось нецелое число), забирает полученное число конфет и покидает комнату. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.

Задача 4. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ отмечена точка F — середина CD. Серединный перпендикуляр к AF пересекает CE в точке H. Докажите, что прямая AH перпендикулярна прямой CE.

Примечание: пятиугольник называется правильным, если все его углы равны и все его стороны равны.

Задача 5. В каждом из 16 отделений коробки 4×4 лежит по золотой монете. Коллекционер помнит, что какие-то две лежащие рядом монеты (соседние по стороне) весят по 9 грамм, а остальные по 10 грамм. За какое наименьшее число взвешиваний на весах, показывающих общий вес в граммах, можно определить эти две монеты?

Задача 6. В некотором государстве 32 города, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Министр путей сообщения, тайный злодей, решил так организовать движение, что покинув любой город, в него нельзя будет вернуться. Для этого он каждый день, начиная с 1 июня 2021 года, может менять направление движения на одной из дорог. Докажите, что он сможет добиться своего к 2022 году (т. е. за 214 дней).

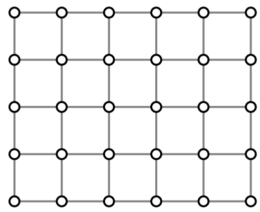
Задачи, решения, информация о закрытии LXXXIV Московской математической олимпиады — на сайте `mccme.ru/mmo/`

LXXXIV Московская математическая олимпиада

28 марта 2021 года • 9 класс

Задача 1. Положительные числа a и b таковы, что $a - b = a/b$. Что больше, $a + b$ или ab?

Задача 2. Клетки бумажного квадрата 8×8 раскрашены в два цвета. Докажите, что Арсений может вырезать из него по линиям сетки два квадрата 2×2, не имеющих общих клеток, раскраски которых совпадают. (Раскраски, отличающиеся поворотом, считаются разными.)



Задача 3. В узлах сетки клетчатого прямоугольника 4×5 расположены 30 лампочек, изначально все они погашены. За ход разрешается провести любую прямую, не задевающую лампочек (размерами лампочек следует пренебречь, считая их точками), такую, что с какой-то одной стороны от неё ни одна лампочка не горит, и зажечь все лампочки по эту сторону от прямой. Каждым ходом нужно зажигать хотя бы одну лампочку. Можно ли зажечь все лампочки ровно за четыре хода?

Задача 4. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает сторону AB в точке D, а сторону AC — в точке E. Пусть X и Y — середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника MXY, касается ω.

Задача 5. В ряд лежат $100N$ бутербродов, каждый с колбасой и сыром. Дядя Фёдор и кот Матроскин играют в игру. Дядя Фёдор за одно *действие* съедает один бутерброд с одного из краёв. Кот Матроскин за одно действие может стянуть колбасу с одного бутерброда (а может ничего не делать). Дядя Фёдор каждый *ход* делает по 100 действий подряд, а кот Матроскин делает только 1 действие; дядя Фёдор ходит первым, кот Матроскин вторым, далее ходы чередуются до тех пор, пока дядя Фёдор не доест все бутерброды. Дядя Фёдор выигрывает, если последний съеденный им бутерброд был с колбасой. Верно ли, что при каждом натуральном N он сможет выиграть независимо от ходов кота Матроскина?

Задача 6. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0, каждый раз либо на p вправо, либо на q влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального $d < p + q$ найдутся два числа, посещённые лягушкой и отличающиеся на d.

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXIV Московской математической олимпиады —
на сайте mccme.ru/mmo/

Задача 1. На доске записано натуральное число. Если у него стереть последнюю цифру (в разряде единиц), то останется ненулевое число, которое будет делиться на 20, а если первую — то на 21. Какое наименьшее число может быть записано на доске, если его вторая цифра не равна 0?

Задача 2. Дана равнобокая трапеция, сумма боковых сторон которой равна большему основанию. Докажите, что острый угол между диагоналями не больше чем 60°.

Задача 3. Есть бесконечная в одну сторону клетчатая полоска, клетки которой пронумерованы натуральными числами, и мешок с десятью камнями. В клетках полоски камней изначально нет. Можно делать следующее:
— перемещать камень из мешка в первую клетку полоски или обратно;
— если в клетке с номером i лежит камень, то можно переложить камень из мешка в клетку с номером $i+1$ или обратно.
Можно ли, действуя по этим правилам, положить камень в клетку с номером 1000?

Задача 4. Внутри четырехугольника $ABCD$ взяли точку P. Прямые BC и AD пересекаются в точке X. Оказалось, что прямая XP является внешней биссектрисой углов APD и BPC. Пусть PY и PZ — биссектрисы треугольников APB и DPC. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

Задача 5. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0, каждый раз либо на p вправо, либо на q влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального $d < p + q$ найдутся два числа, посещённые лягушкой и отличающиеся на d.

Задача 6. *Верхней целой частью* числа x называют наименьшее целое число, большее или равное x. Докажите, что существует такое вещественное число A, что для любого натурального n расстояние от верхней целой части A^n до ближайшего квадрата натурального числа всегда равно 2.

Задачи, решения, информация о закрытии LXXXIV Московской математической олимпиады — на сайте `mccme.ru/mmo/`

LXXXIV Московская математическая олимпиада

28 марта 2021 года • 11 класс, 1 день

Задача 1. На доске записано натуральное число. Если у него стереть последнюю цифру (в разряде единиц), то останется ненулевое число, которое будет делиться на 20, а если первую — то на 21. Какое наименьшее число может быть записано на доске, если его вторая цифра не равна 0?

Задача 2. Существует ли функция f, определённая на отрезке $[-1; 1]$, которая при всех действительных x удовлетворяет равенству

$$2f(\cos x) = f(\sin x) + \sin x?$$

Задача 3. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Точки X и Y — середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника MXY касается окружности ω.

Задача 4. В некоторой стране есть 100 городов, которые связаны такой сетью дорог, что из любого города в любой другой можно проехать только одним способом без разворотов. Схема сети дорог известна, развилки и перекрестки сети необязательно являются городами, всякая тупиковая ветвь сети обязательно заканчивается городом. Навигатор может измерить длину пути по этой сети между любыми двумя городами. Можно ли за 100 таких измерений гарантированно определить длину всей сети дорог?

Задача 5. Многогранник с вершинами в серединах рёбер некоторого куба называется *кубооктаэдром*. В сечении кубооктаэдра плоскостью получился правильный многоугольник. Какое наибольшее число сторон он может иметь?

Задача 6. *Верхней целой частью* числа x называют наименьшее целое число, большее или равное x. Существует ли такое число A, что для любого натурального n расстояние от верхней целой части A^n до ближайшего квадрата натурального числа всегда равно 2?

Задачи, решения, информация о втором дне и о закрытии LXXXIV Московской математической олимпиады — на сайте `mccme.ru/mmo/`

LXXXIV Московская математическая олимпиада

24 апреля 2021 года ⧫ 11 класс, второй день

Задача 1. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, наибольший из которых равен сумме двух других. Докажите, что $c > ab$.

Задача 2. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Точка B_1 симметрична точке B относительно стороны AC. Прямые AO и B_1C пересекаются в точке K. Докажите, что луч KA является биссектрисой угла BKB_1.

Задача 3. Найдите наименьшее натуральное число $N > 9$, которое не делится на 7, но если вместо любой его цифры поставить семёрку, то получится число, которое делится на 7.

Задача 4. Существует ли такой выпуклый четырёхугольник, у которого длины всех сторон и диагоналей в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию?

Задача 5. В лаборатории на полке стоят 120 внешне неразличимых пробирок, в 118 из которых находится нейтральное вещество, в одной — яд и в одной — противоядие. Пробирки случайно перемешались, и нужно найти пробирку с ядом и пробирку с противоядием. Для этого можно воспользоваться услугами внешней тестирующей лаборатории, в которую одновременно отправляют несколько смесей жидкостей из любого числа пробирок (по одной капле из пробирки), и для каждой смеси лаборатория сообщит результат: $+1$, если в смеси есть яд и нет противоядия; -1, если в смеси есть противоядие, но нет яда; 0 в остальных случаях. Можно ли, подготовив 19 таких смесей и послав их в лабораторию единой посылкой, по сообщённым результатам гарантированно определить, в какой пробирке яд, а в какой противоядие?

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXIV Московской математической олимпиады
на сайте `mccme.ru/mmo/`

LXXXIV Московская математическая олимпиада

24 апреля 2021 года ⧫ 11 класс, второй день

Задача 1. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, наибольший из которых равен сумме двух других. Докажите, что $c > ab$.

Задача 2. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Точка B_1 симметрична точке B относительно стороны AC. Прямые AO и B_1C пересекаются в точке K. Докажите, что луч KA является биссектрисой угла BKB_1.

Задача 3. Найдите наименьшее натуральное число $N > 9$, которое не делится на 7, но если вместо любой его цифры поставить семёрку, то получится число, которое делится на 7.

Задача 4. Существует ли такой выпуклый четырёхугольник, у которого длины всех сторон и диагоналей в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию?

Задача 5. В лаборатории на полке стоят 120 внешне неразличимых пробирок, в 118 из которых находится нейтральное вещество, в одной — яд и в одной — противоядие. Пробирки случайно перемешались, и нужно найти пробирку с ядом и пробирку с противоядием. Для этого можно воспользоваться услугами внешней тестирующей лаборатории, в которую одновременно отправляют несколько смесей жидкостей из любого числа пробирок (по одной капле из пробирки), и для каждой смеси лаборатория сообщит результат: $+1$, если в смеси есть яд и нет противоядия; -1, если в смеси есть противоядие, но нет яда; 0 в остальных случаях. Можно ли, подготовив 19 таких смесей и послав их в лабораторию единой посылкой, по сообщённым результатам гарантированно определить, в какой пробирке яд, а в какой противоядие?

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXIV Московской математической олимпиады
на сайте `mccme.ru/mmo/`